

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук

На правах рукописи

Сандуляну Штефан Васильевич

**Асимптотические и численные методы исследования
взаимодействия газовых пузырьков в жидкости вблизи
их контакта в пульсирующем поле давления**

01.02.05 — Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Петров Александр Георгиевич

Москва, 2019

Оглавление

Введение	4
1 Уравнения динамики взаимодействующих газовых пузырьков в акустическом поле давления	11
1.1 Постановка задачи	11
1.2 Уравнения Лагранжа	13
1.3 Вынужденные пульсации пузырьков	14
1.4 Основные результаты	16
2 Кинетическая энергия жидкости при движении в ней двух сфер переменных радиусов	20
2.1 Введение	20
2.2 Постановка задачи	22
2.3 Бисферические координаты	23
2.4 Функция тока в бисферических координатах	25
2.5 Кинетическая энергия	27
2.6 Сравнение рядов для коэффициентов кинетической энергии с рядами Хикса и Воинова	31
2.7 Асимптотические разложения вблизи контакта	37
2.8 Оценки остаточных членов	45
2.9 Разложение по малому зазору h между сферами	51
2.10 Трехчленное разложение кинетической энергии	56
2.11 Сравнение асимптотических разложений	59
2.12 Гидродинамическая сила	62
2.13 Выводы	63
2.14 Приложение: Разложение функций по полиномам Гегенбауэра	63
2.15 Приложение: Преобразование коэффициентов кинетической энергии	65
3 Движение двух сфер переменных радиусов вдоль линии центров в вязкой жидкости в приближении Стокса	67

3.1	Введение	67
3.2	Постановка задачи	69
3.3	Функция тока в бисферических координатах	70
3.4	Вязкие силы	71
3.5	Граничные условия - нормальная составляющая	72
3.6	Граничные условия - тангенциальная составляющая	74
3.6.1	Случай прилипания на границе	74
3.6.2	Случай свободной границы	76
3.6.3	Общий случай	79
3.7	Асимптотический вид вязких сил	80
3.7.1	Случай прилипания	80
3.7.2	Случай свободной границы	82
3.7.3	Общий случай	82
3.8	Выводы	85
3.9	Приложение: Разложение по полиномам Гегенбауэра	86
4	Условия слияния	88
4.1	Преобразование Рауса	88
4.2	Случай прилипания	90
4.2.1	Решение методом осреднения	90
4.2.2	Численное решение уравнений Лагранжа	97
4.3	Случай свободной границы	106
4.3.1	Решение методом осреднения	106
4.3.2	Численное решение уравнений Лагранжа	107
4.4	Общий случай	108
4.5	Выводы	108
	Заключение	110
	Список сокращений и условных обозначений	112
	Список литературы	115
	Список изображений	125
	Список таблиц	129

Введение

Актуальность темы. Исследование вибрационных воздействий на газожидкостные системы представляет важную научную проблему механики многофазных сред в связи с многочисленными приложениями к различным технологическим процессам. Этой проблеме посвящены известные монографии Нигматулина Р.И. [23, 24], Ганиева Р.Ф. [11], Блехмана И.И. [3] и других ученых как в России, так и за рубежом. Наблюдаемое слияние пузырьков при вибрационных воздействиях на газожидкостные системы — явление, которое изучается более ста лет, начиная с работ С.А. Бьеркнеса и В. Бьеркнеса [34]. Бьеркнесы теоретически и экспериментально установили, что на большом расстоянии между пульсирующими в фазе сферическими пузырьками возникает сила притяжения обратно пропорциональная квадрату расстояния. Тем не менее, проблема слияния двух газовых пузырьков в жидкости при вибрационном воздействии — одна из основных нерешенных до сих пор проблем гидродинамики многофазных сред. От ее решения зависит корректность моделирования газожидкостных смесей, часто используемых в инженерных приложениях.

Наблюдения показывают, что сближение пузырьков под действием сил Бьеркнесов, известных на больших расстояниях как силы притяжения, не всегда заканчиваются слиянием [18]. Поскольку сила Бьеркнеса является главной асимптотикой силы гидродинамического взаимодействия двух пульсирующих сфер на большом расстоянии их друг от друга, она не применима для описания движения сфер при приближении их к контакту. Вблизи контакта структура гидродинамических сил существенно сложнее главной асимптотики Бьеркнесов. В этой структуре нужно учитывать не только инерцию, но и вязкость жидкости. При этом каждый из этих эффектов связан с решением сложных краевых задач математической физики.

Эффекты слияния и дробления пузырьков, которые часто игнорируются, являются основными факторами, влияющими на дисперсный состав газожидкостной системы. Диссертация направлена на исследование эффектов слияния пузырьков.

Степень разработанности темы. Самым распространенным подходом к исследованию гидродинамического взаимодействия пульсирующих пузырьков, начатым более ста лет назад С.А. Бьеркнесом и В. Бьеркнесом, является представление силы в виде разложения по обратным расстояниям между пузырьками, что мало эффективно ввиду слабой сходимости разложений вблизи контакта.

Известны частные математические исследования силы, полученные переразложениями рядов по другому параметру: расстоянию между поверхностями сфер, который при приближении к контакту стремится к нулю. Такие исследования были выполнены для случая твердых шаров в идеальной жидкости (Raszilier *et al.* 1990 [75]), в вязкой жидкости (Jeffrey 1982 [58]). Для случая пульсирующих сфер имеется недавнее исследование (Michelin *et al.* 2019 [68]), найдена главная асимптотика вязкой силы для расширяющегося пузырька у стенки. Для двух пульсирующих сферических пузырьков равных радиусов главные асимптотики для инерционной и вязкой сил найдены Петровым А.Г. 2011 [26]. Им построены дифференциальные уравнения для их сближения.

Цели работы. Определение безразмерных параметров, влияющих на слияние пузырьков произвольных радиусов и отсутствие его. Определение критериев, при которых пузырьки не будут сливаться.

Основные задачи исследования:

- Точное решение задач о силах вязкого и невязкого взаимодействия двух пульсирующих сфер в жидкости.
- Асимптотические разложения сил вязкого и невязкого взаимодействия двух пульсирующих сфер в жидкости вблизи контакта.
- Асимптотическое уравнение динамики пузырьков, пульсирующих в переменном поле давления вблизи контакта.
- Вывод условий слияния и отсутствия слияния пузырьков.

Научная новизна.

- С помощью точного решения краевой задачи для функции тока найдено новое выражение для кинетической энергии идеальной жидкости при движении в ней двух пульсирующих сфер. Это выражение удобно для получения разложений сил гидродинамического взаимодействия по малому расстоянию между поверхностями сфер.
- Из решения краевой задачи для уравнений Стокса вязкой жидкости получены точные выражения для вязких сил действующих на две пульсирующие сферы.
- Получены асимптотические разложения по малому расстоянию между поверхностями сфер для сил гидродинамического взаимодействия пульсирующих сфер вблизи их контакта в идеальной и вязкой жидкостях.
- Проведены численное и асимптотическое исследования уравнений сближения пульсирующих пузырьков вблизи контакта.
- Методом осреднения динамики двух пульсирующих пузырьков вблизи их контакта дан вывод условий слияния и отсутствия слияния пузырьков различных радиусов.

Теоретическая и практическая значимость. Выведены уравнения динамики пульсирующих пузырьков вблизи контакта. Методом осреднения найдены условия, при которых происходит слияние пузырьков, а также найдены условия при которых процесс сближения заканчивается периодически колебаниями на конечном расстоянии сфер друг от друга. Достоверность условий слияния и отсутствия его доказывается сравнением с численным решением динамических уравнений. Эти результаты можно использовать для эффективного освобождения газовой фазы из газожидкостной системы. Такие процессы типичны в химико технологических и биотехнологических реакторах [72], а также при водоочистке и обогащении [12]. В последние годы активно исследуется применение акустического воздействия на пузырьки с целью терапии и доставки лекарств [39]. Процессы слияния пузырьков необходимо учитывать для увеличения эффективности таких методов, а также для из безопасности.

Методология и методы исследования. Исследование базируется на построении точных решений для функции тока течения жидкости для двух сфер переменного радиуса, скорости центров которых направлены по линии центров сфер. Решения строятся как для идеальной жидкости так и для вязкой жидкости в приближении Стокса с различными граничными условиями. Динамические уравнения составляются с помощью метода Лагранжа и упрощаются методом Рауса исключения циклической координаты. Эти уравнения решаются численно и методом осреднения.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Показано, что для частоты акустического воздействия много меньше собственной частоты колебаний пузырьков относительные амплитуды колебаний пузырьков меняются по одинаковому гармоническому закону с частотой равной частоте акустического воздействия.
2. Уравнения движения пузырьков записаны в виде уравнений Лагранжа второго рода. Функцией Лагранжа является кинетическая энергия жидкости, создаваемая движением в ней по линии центров двух сфер, радиусы которых меняются по найденному гармоническому закону; обобщенные координаты - координаты центров сфер, обобщенные силы - вязкие силы.
3. Кинетическая энергия жидкости представлена в виде квадратичной формы от четырех скоростей центров сфер и их радиусов. Все коэффициенты найдены точно и выражены через функции зазора между сферами.
4. Коэффициенты кинетической энергии представлены в виде разложений по зазору между сферами с любой степенью точности.
5. Для движения двух сфер переменных радиусов в вязкой жидкости в приближении Стокса дано точное решение задачи о силе, действующей на сферы для различных видов граничных условий. Вязкая сила выражена точно через зазор между сферами.
6. Для различных видов граничных условий для силы получено асимптотическое разложение вязкой силы по зазору между сферами.

7. Доказано, что с большой точностью выполнен закон сохранения импульса. Уравнения динамики методом Рауса сведены к одному уравнению.
8. Методом осреднения найдена безразмерная сила, как функция от относительного зазора между сферами, зависящая от трех безразмерных параметров: отношения радиусов, относительной амплитуды давления и параметра вязкости. Полученная функция определяет условия слияния и отсутствия слияния пузырьков в пульсирующем поле давления.
9. Получен критерий слияния и отсутствия слияния пузырьков. Если отношение радиусов пузырьков меньше 2,8, пузырьки в акустической волне сливаются. При большем отношении радиусов в зависимости от величин параметра вязкости и относительной амплитуды давления слияние может не происходить.

Достоверность. Достоверность полученных автором точных и асимптотических решений обосновывается сравнением с ранее полученными решениями в иной форме с помощью других методов, совпадение с частным решением для сфер с постоянными и переменными радиусами в работах отечественных и зарубежных авторов. Проводится контроль асимптотических решений численными решениями выведенных точных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты работы в разное время докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях:

1. 55-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 19-25 ноября 2012
2. 57-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 24-29 ноября 2014
3. XIX Международная конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 24-31 мая 2015.
4. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 20-24 августа 2015.
5. 9th International Symposium on Cavitation, Lausanne, 6-10 Dec. 2015.

6. Всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва посвященной 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН 4-8 сентября 2017.
7. 61-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 19-25 ноября 2018.
8. XXI Международная конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алуншта, 24-31 мая 2019.
9. 62-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 18-24 ноября 2019.
10. 10-ая международная научная школа молодых ученых "Волны и вихри в сложных средах Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 3 - 5 декабря 2019.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 статьи [82–84] из которых 2 [82, 83] индексированные в базах данных «Сеть науки» (Web of Science) и «Скопус» (Scopus), а также 9 тезисов международных и всероссийских конференций [85–93].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения. Работа содержит 129 страниц, включая 36 рисунков и 4 таблиц. Список литературы содержит 93 наименования.

Благодарности

Автор выражает признательность научному руководителю Александру Георгиевичу Петрову за руководство диссертацией, за постановку интересной и перспективной задачи динамики двух пузырьков в акустическом поле давления.

Автор выражает благодарность коллективу кафедры Теоретической механики Московского физико-технического института за поддержку и творческую атмосферу при работе на кафедре во время аспирантуры.

Автор также выражает благодарность Вановскому Владимиру Валерьевичу за ценные идеи и критические замечания при решении задач диссертации, а также за многолетнюю верную дружбу.

Глава 1

Уравнения динамики взаимодействующих газовых пузырьков в акустическом поле давления

1.1 Постановка задачи

Следуя Ландау [21], гидродинамические силы разделяются на инерционные, которые определяются в рамках модели идеальной жидкости, и вязкие силы, которые учитываются в безынерционном приближении Стокса.

Рассматривается движение пузырьков в воде характерных размеров $R \sim 10 - 50$ мкм, в акустическом поле давления с частотой $\omega \sim 10^4 - 10^5$ рад/с. В этом случае пузырьки пульсируют с одинаковой фазой и частотой равной частоте внешнего воздействия, и по закону Бьеркнесов пузырьки притягиваются друг к другу.

Вблизи контакта задача гидродинамического взаимодействия пузырьков сильно осложняется, а характер движения пузырьков может измениться, как под влиянием сил инерции, так и вязких сил, которые становятся доминирующими. Диссертация посвящена исследованию гидродинамического взаимодействия пузырьков вблизи контакта с учетом всех сил, действующих на пузырьки.

В настоящее время известна теория взаимодействия двух пульсирующих газовых пузырьков в жидкости, начиная с классических работ 19-го века Хикса [54–56] и Бьеркнесов [34]. Для коэффициентов квадратичной формы кинетической энергии жидкости при движении в ней двух твердых сфер точ-

ные ряды были получены Хиксом в 1880 г. [54], а для переменных радиусов — Воинов О.В. в 1970 г. [6, 8, 10]. Вблизи контакта двух сфер постоянных радиусов Воинов в 1969 г. получил для рядов Хикса трехчленное разложение по малому зазору между сферами для коэффициентов кинетической энергии [7]. Для тех же коэффициентов Raszillier *et al.* в 1990 г. [75] разработал алгоритм вычисления разложения по малому зазору любого порядка. Для переменных радиусов Петров А.Г. 2011 [26] получил двухчленное разложение по малому зазору в случае равных радиусов. Для рассмотрения взаимодействия пузырьков в общем случае необходимо найти разложение по малому зазору для пузырьков разных радиусов.

Разложение вязкой силы вблизи контакта для твердых шаров получены в работах: Cooley, O'Neill 1969 [38], Зинченко А.З. 1978 [14], Jeffrey 1982 [58]. Для двух сфер переменных радиусов в случае нулевого тангенциального напряжения задача рассматривалась в недавней работе Michelin S. *et al.* 2018 [67]. Для расширяющейся сферы около стенки главная асимптотика вязкой силы в приближении тонкого слоя при условии проскальзывания на границе сферы была получена в работе Michelin S. *et al.* 2019 [68].

В работах Воинова О.В. Головина А.М. [9] Кузнецова Г. Н., Щукина И. Е. [19], Заболотской Е.А. [13], Doinikov A. A. [45–47], Аганина А.А., Давлетшина А.И. [1, 2], Harkin [53] и других [29, 31, 66, 71] изучается сближение пульсирующих сферических пузырьков с помощью разложений по обратному расстоянию между центрами сфер. Однако такое описание сближения к контакту затруднено из-за логарифмической расходимости, что показано в работе Петрова А.Г. 2011 [26]. В работе Pandey V. 2019 [73], утверждается, что сила Бьеркнеса может принимать индивидуальное значение для каждого из пузырьков, более того, вблизи контакта может случиться, что на один из пузырьков действует сила притяжения, а на другой – сила отталкивания. Таким образом, автор пытается объяснить отсутствие слияния между пузырьками. В ошибочности данной работы легко убедиться, применяя Лагранжевы формализм.

Среди экспериментальных работ при больших расстояниях между пузырьками следует отметить Казанцев 1959 [17] и Сгун 1975 [41], в которых расчет движения пузырьков на достаточно больших расстояниях по классическо-

му закону Бьеркнесов подтверждается экспериментом. На близких же расстояниях следует отметить недавние эксперименты Junjie Jiao et al. 2013–2015 [60–62], Cleve S. et al. 2018 [37], где исследуется слияние пульсирующих пузырьков в акустическом поле давления, однако, удовлетворительного согласия с известными классическими теориями пока не достигнуто. Для исследования сближения пузырьков вблизи контакта принципиальное значение имеет разложение сил по малому зазору между их поверхностями. В работе Петрова А.Г. 2011 [26] для пузырьков равных радиусов показано, что главная асимптотика вязкой силы взаимодействия пузырьков при осреднении исчезает. В диссертации показано, что этот результат является общим и для пузырьков произвольных радиусов. Поэтому для описания процесса сближения пузырьков требуется вычислять следующие члены разложения вязкой силы и этот вопрос исследуется в **главе 3**.

1.2 Уравнения Лагранжа

С помощью метода Лагранжа рассматривается взаимодействие двух сферических пузырьков в жидкости с радиусами $R \sim 10 - 50$ мкм в пульсирующем поле давления $p(t) = p_\infty + \Delta p \cos(\omega t)$ (p_∞ – среднее статическое давление, Δp – амплитуда колебаний давления с круговой частотой ω). При рассмотрении динамики пузырьков не будут учитываться силы Архимеда. Как показано в экспериментальных работах [60–62], градиент давления стоячей волны по вертикали уравнивает силу Архимеда, при этом стабилизация пузырьков происходит в одной горизонтальной плоскости.

Запишем Лагранжиан системы в виде [25, 26]

$$L = T - \Pi, \quad \Pi = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{4}{3} \pi R_i^3 \left[p(t) + \frac{p_{i0}}{\gamma - 1} \left(\frac{R_{i0}}{R_i} \right)^{3\gamma} \right] + 4\pi\sigma R_i^2 \right\}, \quad (1.2.1)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, γ – показатель адиабаты газа в пузырьках, $p_{i0} = p_\infty + 2\sigma/R_{i0}$ и R_{i0} – давление и радиус пузырька в отсутствии пульсации давления.

Рассматриваемый Лагранжиан L зависит от четырех обобщенных координат: z_1, z_2, R_1, R_2 и их скоростей $\dot{z}_1 = -u_1, \dot{z}_2 = u_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2$. Уравнения Лагранжа

принимают вид

$$\frac{dI_1}{dt} = F_B + F_{\mu 1}, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = -F_B + F_{\mu 2}, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \frac{\partial T}{\partial R_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial R_1}, \quad (1.2.4)$$

$$\frac{dI_4}{dt} = \frac{\partial T}{\partial R_2} - \frac{\partial \Pi}{\partial R_2}. \quad (1.2.5)$$

где четыре импульса системы равны

$$I_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} = -\frac{\partial T}{\partial u_1} = -2\pi\rho \left[2(A_1 u_1 + B u_2) + C_{12} \dot{R}_2 + C_{11} \dot{R}_1 \right], \quad (1.2.6)$$

$$I_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} = \frac{\partial T}{\partial u_2} = 2\pi\rho \left[2(A_2 u_2 + B u_1) + C_{21} \dot{R}_1 + C_{22} \dot{R}_2 \right], \quad (1.2.7)$$

$$I_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{R}_1} = 2\pi\rho [2(D_1 \dot{R}_1 + E \dot{R}_2) + C_{11} u_1 + C_{21} u_2], \quad (1.2.8)$$

$$I_4 = \frac{\partial T}{\partial \dot{R}_2} = 2\pi\rho \left[2(D_2 \dot{R}_2 + E \dot{R}_1) + C_{12} u_1 + C_{22} u_2 \right]. \quad (1.2.9)$$

Здесь введено обозначение обобщенной силы Бьеркнеса $F_B = \partial T / \partial r$. Ее асимптотическое выражение вблизи контакта будет получено в **главе 2**, а выражения для вязких сил $F_{\mu 1}$ и $F_{\mu 2}$ — в **главе 3**.

1.3 Вынужденные пульсации пузырьков

Следуя работе [26], предполагаются выполненными условия:

- 1) малость амплитуды акустического воздействия: $\Delta p \ll p_\infty$,
- 2) ограничение для частоты акустического воздействия:

$$\omega^2 \ll \omega_0^2, \quad \omega^2 M \ll \omega_0^2. \quad (1.3.1)$$

При коэффициенте поверхностного натяжения σ и показателе адиабаты газа в пузырьке γ собственная частота колебаний пузырька радиуса R и параметр вязкости M определяются формулами

$$\omega_0^2 = \frac{3\gamma p_\infty}{\rho_l R^2} + \frac{2(3\gamma - 1)\sigma}{\rho_l R^3}, \quad M = \frac{\mu_l}{\rho_l R^2 \omega}. \quad (1.3.2)$$

Ниже будут рассматриваться пузырьки с радиусами в диапазоне $R \sim 10 - 50 \mu\text{м}$, собственная частота $\omega_0 \sim (0,4 - 2) \times 10^6 \text{рад/с}$. При частоте $\omega \sim 10^4 - 10^5 \text{рад/с}$ параметр $M \sim 0,01 - 0,07$ оба условия (1.3.1) выполняются.

В предположении (1.3.1) в уравнениях Лагранжа (1.2.4), (1.2.5), следуя [26], можно пренебречь инерционными и вязкими членами. Тогда в линейном приближении по амплитудам колебаний $\varepsilon_i(t) = (R_i(t) - R_{i0})/R_{i0}$ получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_i} = 0, \quad \Pi = \sum_{i=1}^2 2\pi R_{i0}^3 (C_i + 2\Delta p \cos(\omega t)\varepsilon_i + 3\gamma p_\infty \varepsilon_i^2). \quad (1.3.3)$$

Из уравнения (1.3.3) следует

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t), \quad \varepsilon_0 = -\frac{\Delta p}{3\gamma p_\infty}. \quad (1.3.4)$$

Таким образом, получен важный вывод: пузырьки пульсируют с одинаковыми относительными амплитудами и одинаковыми фазами. Тем самым система с четырьмя степенями свободы сведена к системе уравнений Лагранжа с двумя степенями свободы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} = F_B + F_{\mu 1}, \quad (1.3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} = -F_B + F_{\mu 2}. \quad (1.3.6)$$

Также следует отметить, что при постоянном отношении радиусов $R_1(t)/R_2(t) = R_{10}/R_{20}$ существенно облегчается решение задачи взаимодействия пузырьков, как численно, так и аналитически.

В главе 4 показывается, что с помощью преобразования Рауса, можно еще больше упростить систему: привести систему для уравнения Рауса с одной степенью свободы. В нем будут использоваться асимптотические разложения для силы Бьеркнеса и вязких сил полученных в **главах 2 и 3**.

1.4 Основные результаты

1. Кинетическая энергия жидкости представлена в виде квадратичной формы

$$T = 2\pi\rho l (A_1 u_1^2 + 2B u_1 u_2 + A_2 u_2^2 + D_1 \dot{R}_1^2 + 2E \dot{R}_1 \dot{R}_2 + D_2 \dot{R}_2^2 + C_{11} u_1 \dot{R}_1 + C_{12} u_1 \dot{R}_2 + C_{21} u_2 \dot{R}_1 + C_{22} u_2 \dot{R}_2). \quad (1.4.1)$$

Все коэффициенты найдены точно в параграфе 2.5 и выражены через функции зазора $h = r - R_1 - R_2$ (обозначения показаны на рис. 1.1). Это позволяет получить разложение всех коэффициентов по h с любой степенью точности.

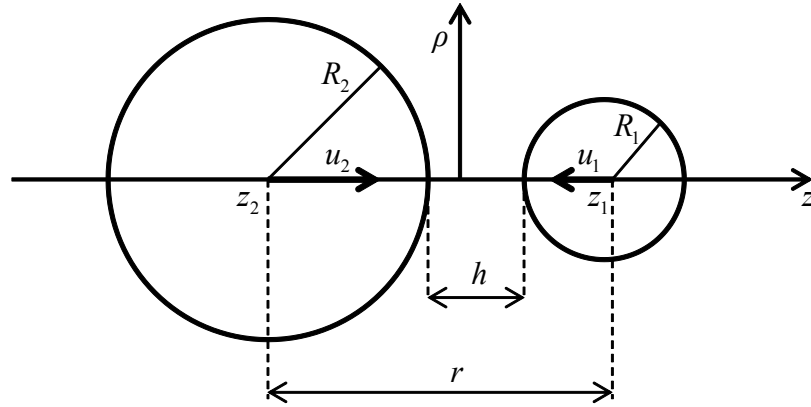


Рис. 1.1: Постановка задачи

2. Коэффициенты кинетической энергии представлены в виде разложений по h :

$$X = f_X(h) + g_X(h) \ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right), \quad \bar{R} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad X = \{A_i, B, C_{ij}, D_i, E\}, \quad (1.4.2)$$

где $f_X(h)$, $g_X(h)$ – степенные полиномы вида $a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_n h^n$, n – степень приближения.

Сила Бьеркнеса представлена в виде разложения по h следующего вида

$$F_B = \frac{\pi\rho}{2} \bar{R}^2 \ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right) \dot{h}^2 + a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + (b_1 h + \dots + b_n h^n) \ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right). \quad (1.4.3)$$

Разработан алгоритм определения разложений до любой степени n .

3. Для движения двух сфер переменных радиусов в вязкой жидкости в приближении Стокса дано точное решение задачи о силе, действующей на сферы для различных видов граничных условий. Вязкая сила выражена точно через параметр h .
4. В случае прилипания для силы получено следующее асимптотическое выражение

$$\begin{aligned}
F_{\mu 1} \approx -F_{\mu 2} = & -6\pi\mu_l \bar{R}^2 \frac{\dot{h}}{h} - 6\pi\mu_l \bar{R} \ln\left(\frac{\bar{R}}{h}\right) \left(\frac{1}{5} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}\right) \dot{h} - \\
& - 6\pi\mu_l \bar{R} \ln\left(\frac{\bar{R}}{h}\right) \left(\frac{R_2(R_2 + 2R_1)}{(R_1 + R_2)^2} \dot{R}_1 + \frac{R_1(R_1 + 2R_2)}{(R_1 + R_2)^2} \dot{R}_2\right) + O(1)
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Остаточный член можно представить в виде

$$a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + (b_1 h + \dots + b_n h^n) \ln \frac{\bar{R}}{h}.$$

5. Показано, что для частоты акустического воздействия меньше собственной частоты колебаний пузырьков $\omega^2 \ll \omega_0^2$ относительные амплитуды колебаний пузырьков $\varepsilon_i(t) = (R_i(t) - R_{i0})/R_{i0}$ меняются по одинаковому закону $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$, $\varepsilon_0 = -\Delta p / (3\gamma p_\infty)$.
6. Доказано, что с достаточной точностью $F_{\mu 1} + F_{\mu 2} = 0$ и выполнен закон сохранения импульса. Уравнения динамики (1.3.5), (1.3.6) методом Рауса сведены к одному уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_R}{\partial \dot{h}} = \frac{\partial T_R}{\partial h} + \frac{F_{\mu l}}{2\pi\rho_l},$$

где T_R - квадратичная форма трех скоростей $\dot{h}, \dot{R}_1, \dot{R}_2$, коэффициенты которой зависят от h, R_1, R_2 и по параметру h представлены в виде разложений вида $f_X(h) + g_X(h) \ln\left(\frac{h}{2R}\right)$.

7. Методом осреднения уравнение динамики пузырьков приведено к виду

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt'} (\mu_{11} \dot{x} + \eta_{11} x + \mu_{12} \dot{\varepsilon} + \eta_{12} \varepsilon) &= \bar{f}(M, k, \delta_0), \\
x = \delta - \delta_0, \quad \delta = h/R_1, \quad k = R_2/R_1, \quad M = \mu_l / (\rho\omega R_1^2),
\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

где коэффициенты $\mu_{11}, \eta_{11}, \mu_{12}, \eta_{12}$ явно выражены через δ_0, k, M .

8. Показано, что притяжение или отталкивание пузырьков зависит от знака правой части $\bar{f}(M, k, \delta_0)$, которая явно выражена через безразмерные параметры M, k, δ_0 . Для отношений радиусов пузырьков $k < 2,8$ при всех значениях M средняя сила $\bar{f}(M, k, \delta_0)$ отрицательная, что приводит к слиянию пузырьков. При $k > 2,8$ средняя сила может изменить знак. В этом случае, начиная с некоторого значения M , пузырьки останавливаются на некотором расстоянии, зависящем от параметра M . Это расстояние увеличивается с ростом M . Зависимость осредненной силы от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $k = R_2/R_1 = 3$ при разных параметрах M представлена на рис. 1.2. Траектория рассчитанная по точным уравнениям (1.3.5) и (1.3.6) показана на рис. 1.3. Как видно из него процесс сближения заканчивается периодическими колебаниями относительно расстояния 0,04. Это значение соответствует условию $\bar{f} = 0$ при $M = 0,02$ на рис. 1.2. Таким образом, подтверждается достоверность теоретического условия отсутствия слияния при $\bar{f}(M, k, \delta_0) > 0$.

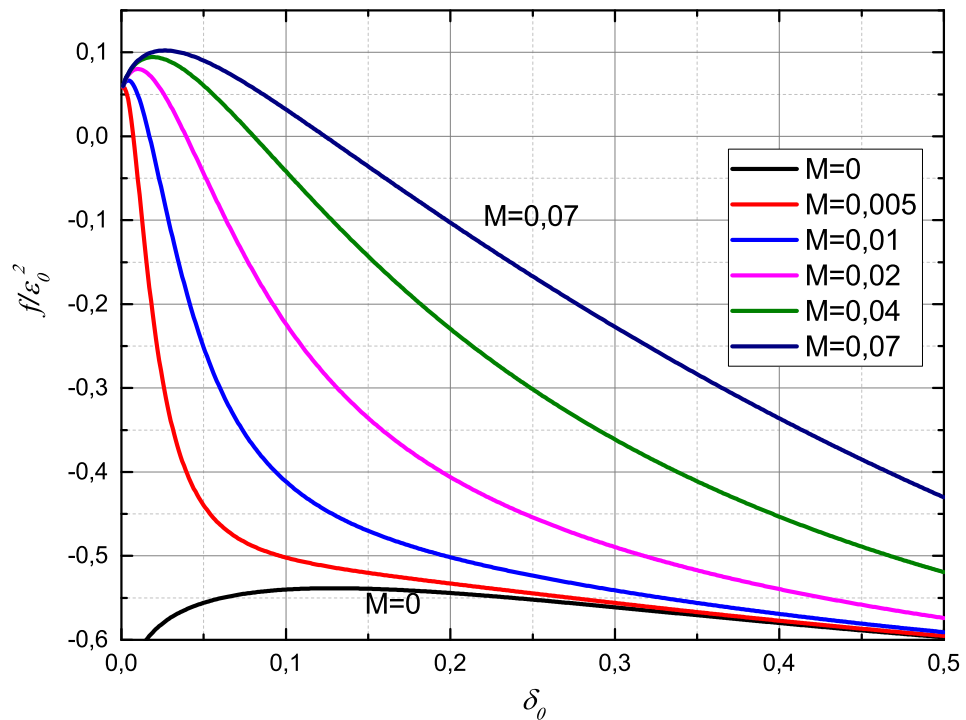


Рис. 1.2: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 3$ при разных параметрах M

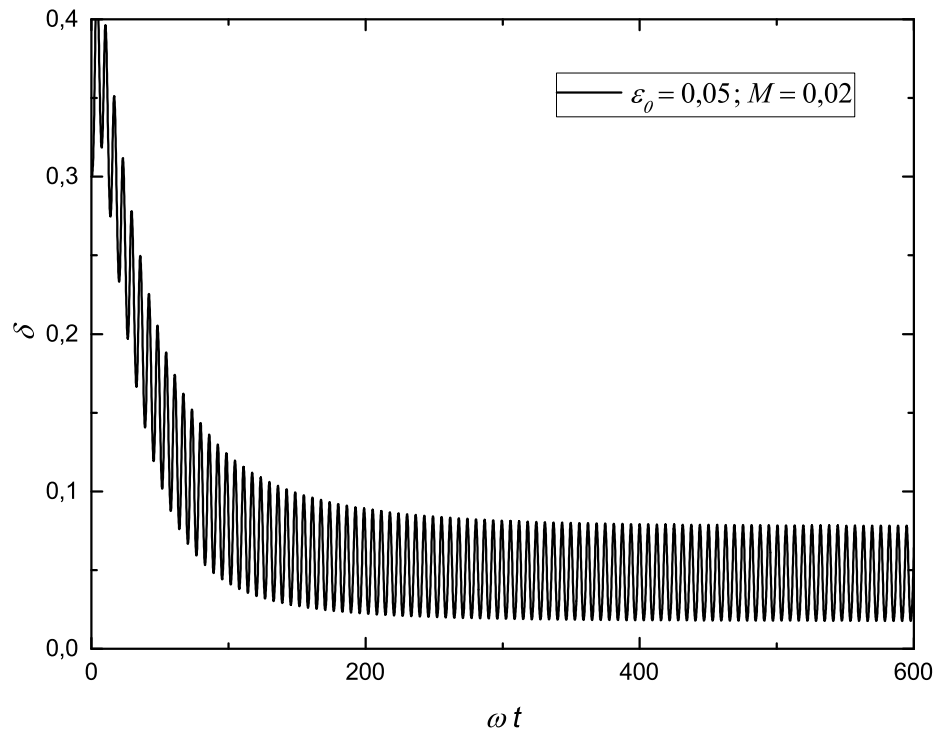


Рис. 1.3: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$.

Глава 2

Кинетическая энергия жидкости при движении в ней двух сфер переменных радиусов

2.1 Введение

Проблема взаимодействия сферических газовых пузырьков в пульсирующем поле давления является предметом изучения большого числа как теоретических, так и экспериментальных работ, начиная с работ Бьеркнесов 19 века [34] и кончая работами последних лет [37, 47, 60, 81]. Бьеркнес установил, что сила взаимодействия между пульсирующими сферами, находящимися на больших расстояниях, обратно пропорциональна квадрату расстояния между сферами. Данная зависимость была подтверждена экспериментально [17, 41]. Однако, как в теоретических работах [26, 47], так и экспериментальных [48, 60–62], показано, что при приближении к контакту эта зависимость не применима и ее следует находить из решения задачи взаимодействия двух пульсирующих сфер в точной постановке.

Задачу взаимодействия газовых пузырьков в акустическом поле волны удобно исследовать методом обобщенных координат Лагранжа. Основным слагаемым функции Лагранжа является кинетическая энергия. Для сферических пузырьков возникает задача вычисления кинетической энергии, как функция радиусов сфер, расстояния между центрами сфер и скоростей изменения радиусов и центров.

Для построения точного решения этой задачи существует два наиболее эф-

фективных метода. Первым из них является метод отражений, который был разработан Хиксом в классической работе [54]. Им построено точное решение для движения двух твердых сфер. Кинетическая энергия является квадратичной формой двух скоростей центров, а для коэффициентов Хикс получил ряды. Ряды абсолютно сходятся для любых значений геометрических параметров задач. Из этих рядов Воинов [7] нашел трехчленное разложение коэффициентов вблизи контакта.

Второй метод решения этой задачи для твердых сфер предложил Нейман [70]. Он нашел потенциал скорости в бисферических координатах. И этим способом для коэффициентов кинетической энергии получил те же ряды Хикса. Нейман также преобразовал эти ряды к другому виду. Rasziilier *et al.* [75] использовал вторую форму рядов Неймана для построения асимптотических разложений вблизи контакта. Алгоритм [75] позволяет получать асимптотическое разложение для любого порядка. Bentwich and Miloh [33] получил вторую форму рядов Неймана, решая задачу в бисферических координат для функции тока по методу Jeffrey [59].

Приближенное решение задачи взаимодействия двух сфер переменного радиуса было выполнено Selby 1890 [77]. Он привел решение с помощью двух отражений. Впервые точное решение задачи для переменных радиусов методом Хикса [54–56] получил Воинов [8]. Квадратичная форма кроме трех коэффициентов Хикса содержит дополнительно еще семь коэффициентов, которые Воинов привел в виде рядов аналогично рядам Хикса [6, 8, 10]. В некоторых частных случаях Воинов предложил способ определения первых членов асимптотических рядов [7,8]. Развивая идеи Воинова [7], в работе Сандуляну Ш.В., Петров А.Г. [83] были найдены трехчленные асимптотические разложения вблизи контакта всех десяти коэффициентов.

Существует также серия работ, в которых решение строится в виде разложений по обратным степеням расстояния между центрами сфер r . Такие решения имеют более громоздкий вид и применимость к исследованию динамики сфер вблизи контакта вызывает сомнение. Как показывает сравнение с точным решением, в работах Кузнецова Г. Н., Щукина И. Е. [19] и Doinikov [45] кинетическая энергия найдена до r^{-3} . В работе Аганин А.А., Давлетшин А.И. [1] решение построено с точностью до r^{-5} . В работе Doinikov

and Bouakaz [47] приведено решение, которое как показывает проверка имеет точность не выше r^{-6} . В работе Harkin [53] приведенное разложение потенциала скоростей до r^{-4} содержат неточности замеченные [47].

В недавних работах А.О. Maksimov, V.I. Yusupov [65] и А. О. Maksimov, Yu. A. Polovinka [64], основываясь на работе Morioka [69], рассматривалось взаимодействие двух пузырьков переменных радиусов с фиксированными центрами. Коэффициенты кинетической энергии оказались отличны от точных, что объясняется неоправданным предположением о постоянстве потенциала скоростей на поверхности сфер. Такая неточность не влияет только на главную асимптотику вторичной силы Бьеркнеса при больших расстояниях между сферами.

Данная глава посвящена разработке алгоритма построения асимптотического разложения любого порядка по малому зазору между сферами. В общем случае переменных радиусов проведено исследование сходимости асимптотического разложения.

2.2 Постановка задачи

Рассматривается задача нахождения кинетической энергии потенциального осесимметричного течения безграничной несжимаемой жидкости плотности ρ_l . Течение жидкости вызывают две сферы радиусов R_1, R_2 , меняющиеся со скоростями \dot{R}_1, \dot{R}_2 . Центры сфер на оси z имеют координаты z_1, z_2 ($z_1 > z_2$) и двигаются со скоростями $u_1 = -\dot{z}_1, u_2 = \dot{z}_2$ направленные на встречу друг друга (Рис. 2.1). Расстояние между центрами сфер $r = z_1 - z_2$, расстояние между поверхностями сфер (зазор) $h = r - R_1 - R_2$. Цель второй главы найти аналитический вид зависимости кинетической энергии $T(R_1, R_2, r, u_1, u_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2)$. При таком выборе аргументов кинетическая энергия симметрична по перестановке индексов 1 и 2.

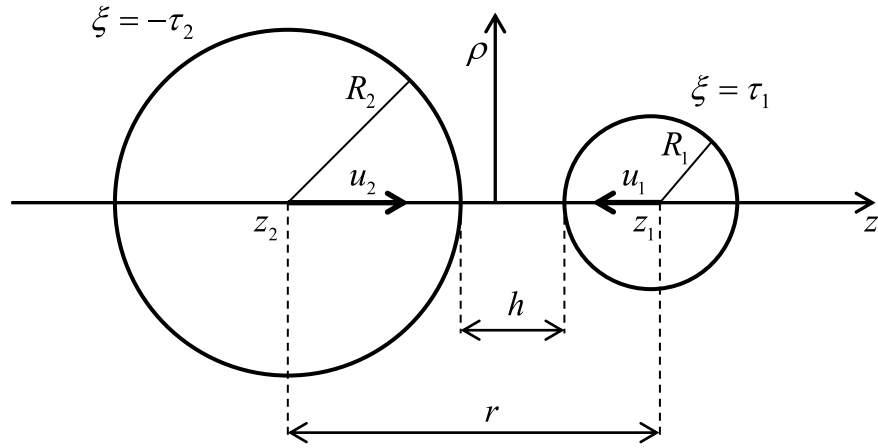


Рис. 2.1: Постановка задачи

Компоненты скорости жидкости v_ρ, v_θ, v_z , в цилиндрической системе координат ρ, θ, z выражаются через функцию тока Стокса ψ

$$\begin{aligned} v_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ v_\theta &= 0, \\ v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Уравнение для функции тока Стокса ψ имеет вид [20]

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0. \tag{2.2.2}$$

2.3 Бисферические координаты

Удобно перейти к бисферическим координатам ξ, ζ, θ

$$\begin{aligned} \rho &= c \frac{\sin \zeta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}, \\ z &= c \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}, \\ (x &= \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Тогда поверхность первой сферы радиуса R_1 задается уравнением

$$\xi = \tau_1 = \text{const}, \quad \zeta \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi], \tag{2.3.2}$$

поверхность же второй сферы радиуса R_2 задается уравнением

$$\xi = -\tau_2 = \text{const}, \quad \zeta \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi], \quad (2.3.3)$$

при этом

$$\begin{aligned} R_1 \operatorname{sh} \tau_1 &= c, \\ R_2 \operatorname{sh} \tau_2 &= c, \\ r &= R_1 \operatorname{ch} \tau_1 + R_2 \operatorname{ch} \tau_2. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Таким образом, можно определить поверхности сфер с помощью параметров τ_1, τ_2 и c , которые выражаются через R_1, R_2 и r

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \operatorname{arcch} \frac{r^2 + R_1^2 - R_2^2}{2rR_1}, \\ \tau_2 &= \operatorname{arcch} \frac{r^2 - R_1^2 + R_2^2}{2rR_2}, \\ c &= R_1 \operatorname{sh} \tau_1 = R_2 \operatorname{sh} \tau_2 = \frac{\sqrt{(r^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2}}{2r}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

следует отметить, что $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$, а при $r = R_1 + R_2$, $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

Для построения асимптотик удобны формулы

$$\begin{aligned} r^2 &= R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \operatorname{ch}(\tau_1 + \tau_2), \\ \operatorname{ch}(\tau_1 + \tau_2) &= \frac{r^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}, \\ \operatorname{ch} \tau_1 &= \frac{r^2 + R_1^2 - R_2^2}{2rR_1}, \\ \operatorname{ch} \tau_2 &= \frac{r^2 + R_2^2 - R_1^2}{2rR_2}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Из них получим

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{2h}{\bar{R}}} + O(h^{3/2}), \\ \tau_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{2h}{\bar{R}}} + O(h^{3/2}), \\ c &= \sqrt{2h\bar{R}} + O(h^{3/2}), \\ \bar{R} &= \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

и при больших расстояниях

$$\begin{aligned}
e^{-(\tau_1+\tau_2)} &= \frac{R_1 R_2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \\
e^{-\tau_1} &= \frac{R_1}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\
e^{-\tau_2} &= \frac{R_2}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\
c &= \frac{r}{2} + O\left(\frac{1}{r}\right).
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

2.4 Функция тока в бисферических координатах

Для поиска функции тока напомним уравнение потенциальности течения (2.2.2) в бисферических координатах [59]

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) = 0. \tag{2.4.1}$$

Функцию тока следует искать в виде [59]

$$\begin{aligned}
\psi &= (\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) C_n^{-1/2}(\mu), \\
U_n(\xi) &= \frac{\alpha_n \operatorname{sh}(n-1/2)(\xi + \tau_2) + \beta_n \operatorname{sh}(n-1/2)(\tau_1 - \xi)}{\operatorname{sh}(n-1/2)(\tau_1 + \tau_2)},
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

где $C_n^{-1/2}(\mu)$ – полиномы Гегенбауэра, $\mu = \cos \zeta$ (далее иногда для удобства также будет использована данная замена). Полиномы Гегенбауэра можно получить из следующего рекуррентного соотношения [28]

$$\begin{aligned}
nC_n^{-1/2}(\mu) &= 2\mu(n-3/2)C_{n-1}^{-1/2}(\mu) - (n-3)C_{n-2}^{-1/2}(\mu), \\
C_0^{-1/2}(\mu) &= 1, \quad C_1^{-1/2}(\mu) = -\mu.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Коэффициенты α_n, β_n следует искать из граничных условий на поверхностях сфер при $\xi = \tau_1$ и $\xi = -\tau_2$. Их можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_1, \mathbf{n}) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta}{c} = -u_1 \left(-\frac{\operatorname{ch} \tau_1 \cos \zeta - 1}{\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta} \right) - \dot{R}_1, \\
(\mathbf{v}_2, \mathbf{n}) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta}{c} = u_2 \left(-\frac{\operatorname{ch} \tau_2 \cos \zeta - 1}{\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta} \right) + \dot{R}_2.
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Проинтегрировав оба граничных условия по ζ и выбрав константы интегрирования таким образом, чтобы на оси симметрии скорость была параллельна данной оси, получим

$$\begin{aligned}\psi|_{\xi=\tau_1} &= u_1 c^2 \frac{1}{2} \frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^2} + \dot{R}_1 c^2 \frac{1}{\operatorname{ch} \tau_1 - \mu} + \\ &+ \left(\frac{\dot{R}_2 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} - \frac{\dot{R}_1 c^2 \operatorname{ch} \tau_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \right), \\ \psi|_{\xi=-\tau_2} &= -u_2 c^2 \frac{1}{2} \frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^2} - \dot{R}_2 c^2 \frac{1}{\operatorname{ch} \tau_2 - \mu} - \\ &- \left(\frac{\dot{R}_1 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} - \frac{\dot{R}_2 c^2 \operatorname{ch} \tau_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} \right).\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

Подставляя общее выражение для функции тока (2.4.2) в граничные условия, получим систему

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n C_n^{-1/2}(\mu) &= u_1 c^2 \frac{1}{2} \frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{3/2}} + \dot{R}_1 c^2 \frac{1}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2}} + \\ &+ \left(\frac{\dot{R}_2 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} - \frac{\dot{R}_1 c^2 \operatorname{ch} \tau_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \right) (\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n C_n^{-1/2}(\mu) &= -u_2 c^2 \frac{1}{2} \frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{3/2}} - \dot{R}_2 c^2 \frac{1}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2}} - \\ &- \left(\frac{\dot{R}_1 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} - \frac{\dot{R}_2 c^2 \operatorname{ch} \tau_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} \right) (\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

Для нахождения коэффициентов α_n, β_n , следует разложить правые части уравнений по полиномам Гегенбауэра, при этом будут использованы формулы вывод которых дается в Приложении 2.14

$$(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-(n-1/2)\tau_1},\tag{2.4.7}$$

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{-(n-1/2)\sqrt{2}}{\operatorname{sh} \tau_1} e^{-(n-1/2)\tau_1},\tag{2.4.8}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \sqrt{2} n(n-1) e^{-(n-1/2)\tau_1}.\tag{2.4.9}$$

После некоторых преобразований получим окончательное решение для функции тока

$$\begin{aligned}
\psi &= (\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) C_n^{-1/2}(\mu), \\
U_n(\xi) &= \frac{\alpha_n \operatorname{sh}(n-1/2)(\xi + \tau_2) + \beta_n \operatorname{sh}(n-1/2)(\tau_1 - \xi)}{\operatorname{sh}(n-1/2)(\tau_1 + \tau_2)}, \\
\alpha_n &= \left(u_1 2n(n-1) + \dot{R}_1 \frac{-(2n-1)}{\operatorname{sh} \tau_1} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\dot{R}_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} - \frac{\dot{R}_1 \operatorname{ch} \tau_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \right) \frac{c^2 \sqrt{2}}{2} e^{-(n-1/2)\tau_1}, \right. \\
\beta_n &= \left(-u_2 2n(n-1) - \dot{R}_2 \frac{-(2n-1)}{\operatorname{sh} \tau_2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\dot{R}_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} - \frac{\dot{R}_2 \operatorname{ch} \tau_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} \right) \frac{c^2 \sqrt{2}}{2} e^{-(n-1/2)\tau_2}. \right.
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

2.5 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия жидкости выражается через интеграл от v^2 по области вне двух сфер

$$T = \frac{\rho_l}{2} \iiint v^2 dV. \tag{2.5.1}$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
v^2 dV &= \left(\left(\frac{1 \operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}{\rho} \frac{\partial \psi}{c \partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{1 \operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}{\rho} \frac{\partial \psi}{c \partial \zeta} \right)^2 \right) \cdot \\
&\cdot \left(\frac{c}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta} \right)^2 \rho d\theta d\xi d\zeta = \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)^2 \right) d\theta d\xi d\zeta.
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Проинтегрировав по θ , получим для T

$$T = \frac{\rho_l}{2} \iint 2\pi \left(\psi'_\xi \frac{1}{\rho} \psi'_\xi + \psi'_\zeta \frac{1}{\rho} \psi'_\zeta \right) d\xi d\zeta. \tag{2.5.3}$$

Учитывая потенциальность течения (2.4.1) можно получить

$$\psi'_{\xi} \frac{1}{\rho} \psi'_{\xi} + \psi'_{\zeta} \frac{1}{\rho} \psi'_{\zeta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\psi \frac{1}{\rho} \psi'_{\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\psi \frac{1}{\rho} \psi'_{\zeta} \right). \quad (2.5.4)$$

Используя данное равенство, а также формулу Грина, кинетическая энергия может быть найдена по формуле [33]

$$\frac{T}{\pi \rho l} = \oint \psi \frac{1}{\rho} \psi'_{\zeta} d\xi - \psi \frac{1}{\rho} \psi'_{\xi} d\zeta = \int_{\xi=-\tau_2}^{\tau_1} \psi \frac{1}{\rho} \psi'_{\zeta} \Big|_{\zeta=0}^{\zeta=\pi} d\xi + \int_{\zeta=0}^{\pi} \psi \frac{1}{\rho} \psi'_{\xi} \Big|_{\xi=-\tau_2}^{\xi=\tau_1} d\zeta. \quad (2.5.5)$$

Обратим внимание на то, что в случае сфер постоянных радиусов функция тока равна нулю на оси симметрии [33]. Отсюда следует, что первый интеграл в этом случае равен нулю.

В нашем же случае, радиусы сфер переменные, поэтому первый интеграл следует сохранить. Действительно, учитывая, что $C_n^{-1/2}(\cos \zeta) = 0$ при $\zeta = \{0, \pi\}$ для $n \geq 2$, $C_0^{-1/2}(\cos \zeta) = 1$, $C_1^{-1/2}(\cos \zeta) = -\cos \zeta$ получим

$$\begin{aligned} \psi|_{\zeta=\pi} &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi + 1}} (U_0(\xi) + U_1(\xi)) = c^2 \left(\frac{\dot{R}_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} - \frac{\dot{R}_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \right), \\ \psi|_{\zeta=0} &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - 1}} (U_0(\xi) - U_1(\xi)) = c^2 \left(\frac{\dot{R}_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} + \frac{\dot{R}_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \right) \frac{|\operatorname{sh} \xi/2|}{\operatorname{sh} \xi/2}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Учитывая также, что $dC_n^{-1/2}(\mu)/d\mu = -1$ при $\mu = 1$ и $dC_n^{-1/2}(\mu)/d\mu = (-1)^n$ при $\mu = -1$ для $n \geq 1$, взятие первого интеграла в формуле (2.5.5) не вызывает сложностей. Для взятия второго интеграла в формуле (2.5.5) подставим в функцию ψ граничные выражения (2.4.5), ψ'_{ξ} найдем из формулы (2.4.2) и раскроем скобки, при этом возникают шесть интегралов. Для этих интегра-

лов при $\xi > 0$, $n \geq 2$ справедливы следующие выражения

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-1}^1 \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \xi - \mu)^2} \frac{\operatorname{ch} \xi - \mu}{1 - \mu^2} \frac{1}{(\operatorname{ch} \xi - \mu)^{1/2}} C_n^{-1/2}(\mu) d\mu = \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{n - 1/2} e^{-(n-1/2)\xi}, \\
I_2 &= \int_{-1}^1 \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \xi - \mu)^2} \frac{\operatorname{ch} \xi - \mu}{1 - \mu^2} \frac{\operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch} \xi - \mu)^{3/2}} C_n^{-1/2}(\mu) d\mu = \\
&= \frac{1}{-3/2} \frac{dI_1}{d\xi} = \frac{4\sqrt{2}}{3} e^{-(n-1/2)\xi}, \\
I_3 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\operatorname{ch} \xi - \mu} \frac{\operatorname{ch} \xi - \mu}{1 - \mu^2} \frac{1}{(\operatorname{ch} \xi - \mu)^{1/2}} C_n^{-1/2}(\mu) d\mu = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{n(n-1)} \frac{e^{(-1)^n \xi/2} - e^{-(n-1/2)\xi}}{\operatorname{sh} \xi}, \\
I_4 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\operatorname{ch} \xi - \mu} \frac{\operatorname{ch} \xi - \mu}{1 - \mu^2} \frac{\operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch} \xi - \mu)^{3/2}} C_n^{-1/2}(\mu) d\mu = -2 \frac{dI_3}{d\xi} = \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{n(n-1)} \left(\frac{\frac{(-1)^n}{2} e^{(-1)^n \xi/2} + (n - \frac{1}{2}) e^{-(n-1/2)\xi}}{\operatorname{sh} \xi} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh} \xi} \frac{e^{(-1)^n \xi/2} - e^{-(n-1/2)\xi}}{\operatorname{sh} \xi} \right), \\
I_5 &= \int_{-1}^1 1 \cdot \frac{\operatorname{ch} \xi - \mu}{1 - \mu^2} \frac{1}{(\operatorname{ch} \xi - \mu)^{1/2}} C_n^{-1/2}(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \int I_3 \operatorname{sh} \xi d\xi = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2n(n-1)} \left(\frac{e^{(-1)^n \xi/2}}{\frac{(-1)^n}{2}} + \frac{e^{-(n-1/2)\xi}}{(n - \frac{1}{2})} \right), \\
I_6 &= \int_{-1}^1 1 \cdot \frac{\operatorname{ch} \xi - \mu}{1 - \mu^2} \frac{\operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch} \xi - \mu)^{3/2}} C_n^{-1/2}(\mu) d\mu = \\
&= I_3 \operatorname{sh} \xi = \frac{\sqrt{2}}{n(n-1)} \left(e^{(-1)^n \xi/2} - e^{-(n-1/2)\xi} \right).
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

При раздельном интегрировании членов с $n = 0$ и $n = 1$ получим расходящиеся интегралы. Поэтому вместо раскрытия скобок, будем интегрировать

сумму двух членов

$$\int_{\zeta=0}^{\pi} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{U_0(\xi)C_0^{-1/2}(\mu) + U_1(\xi)C_1^{-1/2}(\mu)}{(\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^{1/2}} \right) \psi \frac{1}{\rho} \Big|_{\xi=-\tau_2}^{\xi=\tau_1} d\zeta. \quad (2.5.8)$$

После некоторых преобразований можно упростить кинетическую энергию

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\rho_l (A_1 u_1^2 + 2B u_1 u_2 + A_2 u_2^2 + D_1 \dot{R}_1^2 + 2E \dot{R}_1 \dot{R}_2 + D_2 \dot{R}_2^2 + \\ &+ C_{11} u_1 \dot{R}_1 + C_{12} u_1 \dot{R}_2 + C_{21} u_2 \dot{R}_1 + C_{22} u_2 \dot{R}_2), \\ A_1 &= \frac{R_1^3}{6} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}, \\ B &= c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}, \\ C_{11} &= 2c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} S_n(\tau_1), \\ C_{12} &= 2c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} S_n(\tau_2), \\ D_1 &= R_1^3 + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{2 S_n^2(\tau_1)}{(2n-1)^2 - 1}, \\ E &= \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)(\tau_1+\tau_2)}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{2 S_n(\tau_1) S_n(\tau_2)}{(2n-1)^2 - 1}, \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

где введено обозначение $S_n(x) = (e^{(2n-1)x} - (2n-1) \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x) / \operatorname{sh}^2 x$, а коэффициенты A_2 , C_{21} , C_{22} и D_2 получаются перестановкой 1 на 2 в формулах для A_1 , C_{12} , C_{11} и D_1 .

Следует отметить, что ряды (2.5.9) можно также выразить через исходные параметры R_1, R_2, r , подставив:

$$\begin{aligned}
e^{-\tau_1} &= \frac{r^2 + R_1^2 - R_2^2}{2rR_1} - \sqrt{\left(\frac{r^2 + R_1^2 - R_2^2}{2rR_1}\right)^2 - 1}, \\
e^{-\tau_2} &= \frac{r^2 + R_2^2 - R_1^2}{2rR_2} - \sqrt{\left(\frac{r^2 + R_2^2 - R_1^2}{2rR_2}\right)^2 - 1}, \\
e^{-(\tau_1+\tau_2)} &= \frac{r^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2} - \sqrt{\left(\frac{r^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1R_2}\right)^2 - 1}, \\
c &= \frac{\sqrt{(r^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 - 4R_1^2R_2^2}}{2r}.
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

2.6 Сравнение рядов для коэффициентов кинетической энергии с рядами Хикса и Воинова

Для случая твердых сфер точное выражение кинетической энергии впервые было найдено Хиксом [54] методом отражения, оно приведено в книге Ламба [20]. Воинов О.В. развил метод Хикса для случая переменных радиусов. Коэффициенты кинетической энергии, найденные Хиксом имеют вид:

$$A_1 = \frac{R_1^3}{6} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{R_1}{A_j^1}\right)^3, \quad B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{R_2}{B_j^1}\right)^3. \tag{2.6.1}$$

Воинов получил остальные коэффициенты (более подробный вывод содержится в работе Петрова А.Г. [26]):

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_1^3}{(A_j^1)^2 B_j^2}, & C_{12} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_1^3}{(B_j^2)^2 A_{j-1}^1}, \\
D_1 &= R_1^3 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_1^3}{A_j^1} \left[1 + ((B_j^2)^2 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{(B_j^2)^2} \right) \right], \\
E &= \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + \frac{(R_1 R_2)^2}{R_2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{B_{j+1}^2} - B_j^1 \ln \left(1 + \frac{1}{B_{j+1}^2 B_j^1} \right) \right),
\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

где A_j^i, B_j^i можно найти из рекуррентных соотношений:

$$B_j^i = \frac{r}{R_i} A_{j-1}^k - \frac{R_k}{R_i} B_{j-1}^i, \quad A_j^i = \frac{r}{R_i} B_j^k - \frac{R_k}{R_i} A_{j-1}^i, \quad i, k = 1, 2, \quad i \neq k, \tag{2.6.3}$$

с начальными условиями $A_0^i = 1, B_0^i = 0$.

Данные рекуррентные соотношения были разрешены таким образом [7]:

$$\begin{aligned}
 A_j^i &= \frac{f^{j+1} - f^{-(j+1)} + (f^j - f^{-j}) R_i/R_k}{f - f^{-1}}, \\
 B_j^i &= \frac{f^j - f^{-j}}{f - f^{-1}} \frac{r}{R_i}, \\
 i &\neq k, \quad i, k = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

где f – корень уравнения:

$$r^2 f = (R_1 f + R_2) (R_1 + R_2 f). \tag{2.6.5}$$

Оказалось, что f выражается через τ_1 и τ_2 , как $f = e^{-(\tau_1 + \tau_2)}$. Введем также обозначения $q_i = e^{-\tau_i}$. Тогда можно преобразовать выражения для A_j^i, B_j^i :

$$\begin{aligned}
 A_j^i &= \frac{q_i^{-1} f^{-j} - q_i f^j}{q_i^{-1} - q_i} = \frac{\text{sh}(\tau_i + j(\tau_1 + \tau_2))}{\text{sh} \tau_i}, \\
 B_j^i &= \frac{f^{-j} - f^j}{q_k^{-1} - q_k} = \frac{\text{sh} j(\tau_1 + \tau_2)}{\text{sh} \tau_k}.
 \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Тем самым мы получили вид для A_1, A_2, B , представленный в работе Хикса [54].

Не смотря на то, что ряды Хикса (2.6.1) и Воинова (2.6.2) по виду отличаются от рядов (2.5.9), они тождественны. Докажем данное утверждение.

Согласно алгоритму, приведенному в [70], преобразуем коэффициенты ки-

нетической энергии следующим образом (учитывая также, что $c = R_i \operatorname{sh} \tau_i$):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{R_1^3}{6} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{c}{\operatorname{sh}(\tau_1 + j(\tau_1 + \tau_2))} \right)^3 \\
&= \frac{R_1^3}{6} + 4c^3 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_1^{-1} f^{-j} - q_1 f^j} \right)^3 \\
&= \frac{R_1^3}{6} + 4c^3 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{q_1 f^j}{1 - q_1^2 f^{2j}} \right)^3 \\
&= \frac{R_1^3}{6} + 4c^3 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} (q_1 f^j)^{2n+3} \\
&= \frac{R_1^3}{6} + 4c^3 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} (q_1 f^j)^{2n-1} \\
&= \frac{R_1^3}{6} + 4c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} \frac{(q_1 f)^{2n-1}}{1 - f^{2n-1}} \\
&= \frac{R_1^3}{6} + 4c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} \frac{q_1^{2n-1}}{f^{-(2n-1)} - 1} \\
&= \frac{R_1^3}{6} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}.
\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

Аналогично для B получим

$$B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{c}{\operatorname{sh} j(\tau_1 + \tau_2)} \right)^3 = c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}. \tag{2.6.8}$$

Коэффициент C_{11} преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_1^3}{(A_j^1)^2 B_j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c^3}{(\operatorname{sh}(\tau_1 + j(\tau_1 + \tau_2)))^2 \operatorname{sh} j(\tau_1 + \tau_2)} \\
&= 8c^3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(f^{-j} - f^j) (q_1^{-1} f^{-j} - q_1 f^j)^2} \\
&= 8c^3 \sum_{j=1}^{\infty} q_1^2 f^{3j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - (n+2)q_1^{2(n+1)} + (n+1)q_1^{2(n+2)})}{(1 - q_1^2)^2} (f^{2n})^j \\
&= 8c^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_1^{-2} (1 - (n+2)q_1^{2(n+1)} + (n+1)q_1^{2(n+2)})}{(q_1^{-2} - 1)^2} \frac{f^{2n+3}}{1 - f^{2n+3}} \\
&= 8c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q_1^{2n-2} (q_1^{-2n} - nq_1^{-2} + (n-1))}{(q_1^{-2} - 1)^2} \frac{f^{2n-1}}{1 - f^{2n-1}} \\
&= 8c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n(e^{2\tau_1}) e^{-(2n-2)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1}.
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Аналогично для C_{12} получим

$$C_{12} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_1^3}{(B_j^2)^2 A_{j-1}^1} = 8c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{S_n(e^{2\tau_2}) e^{\tau_2}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1}. \tag{2.6.10}$$

Коэффициент D_1 преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_1 &= R_1^3 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_1^3}{A_j^1} \left[1 + ((B_j^2)^2 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{(B_j^2)^2} \right) \right] = \\
&= R_1^3 + 8c^3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1^{-1} - q_1)^2 (q_1^{-1} f^{-j} - q_1 f^j)} \cdot \\
&\cdot \left[1 + \left(\left(\frac{f^{-j} - f^j}{q_1^{-1} - q_1} \right)^2 - 1 \right) \ln \left(1 - \left(\frac{q_1^{-1} - q_1}{f^{-j} - f^j} \right)^2 \right) \right] = \\
&= R_1^3 + 8c^3 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^{-2n+3} \left(1 - (n+1)q_1^{2n} + nq_1^{2(n+1)} \right)^2}{n(n+1)(1-q_1^2)^4} (f^j)^{2n+1} = \quad (2.6.11) \\
&= R_1^3 + 8c^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^{-2n+3} q_1^{4(n+1)} \left(q_1^{-2(n+1)} - (n+1)q_1^2 + n \right)^2}{n(n+1)(1-q_1^2)^4} \frac{f^{2n+1}}{1-f^{2n+1}} = \\
&= R_1^3 + 8c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q_1^{-2n+5} \left(q_1^{-2n} - nq_1^2 + n-1 \right)^2}{n(n-1)(1-q_1^2)^4} \frac{1}{f^{-(2n-1)} - 1} = \\
&= R_1^3 + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{2 S_n^2(\tau_1)}{(2n-1)^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Аналогично для E получим

$$\begin{aligned}
E &= \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + \frac{(R_1 R_2)^2}{R_2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{B_{j+1}^2} - B_j^1 \ln \left(1 + \frac{1}{B_{j+1}^2 B_j^1} \right) \right) = \quad (2.6.12) \\
&= \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)(\tau_1+\tau_2)}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{2 S_n(\tau_1) S_n(\tau_2)}{(2n-1)^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Тем самым была доказана тождественность рядов (2.5.9) с рядами Хикса (2.6.1) и Воинова (2.6.2), что подтверждает достоверность обоих результатов.

Ряды (2.6.1) и (2.6.2) могут быть непосредственно выражены через параметры R_1, R_2, r . При $r > R_1 + R_2$ ряды сходятся как геометрическая прогрессия. А в случае контакта $r = R_1 + R_2$ сходятся как степенные ряды $(1/n^3)$. Однако, производные этих рядов, которые необходимы для вычисления сил, при приближении к контакту расходятся. Ряды же (2.5.9) позволяют получить переразложения по малому зазору h . Производные этих разложений содержат логарифмическую особенность. В этом состоит преимущество рядов (2.5.9). Полученное из рядов (2.5.9) асимптотическое разложение для силы

взаимодействия, позволит исследовать сближение пузырьков аналитически вплоть до контакта.

В работе [47] найдена кинетическая энергия в виде бесконечных сумм по обратным степеням r . Для сравнения коэффициентов кинетической энергии (2.5.9) с коэффициентами работы [47] рассмотрим разложения рядов (2.5.9) по обратным степеням расстояния r до $o(r^{-10})$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{R_1^3}{6} + \frac{R_1^6 R_2^3}{2r^6} + \frac{3R_1^6 R_2^5}{2r^8} + \frac{3R_1^6 R_2^7}{r^{10}}, \\
B &= \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} + \frac{R_1^6 R_2^6}{2r^9}, \\
A_2 &= \frac{R_2^3}{6} + \frac{R_1^3 R_2^6}{2r^6} + \frac{3R_1^5 R_2^6}{2r^8} + \frac{3R_1^7 R_2^6}{r^{10}}, \\
C_{11} &= \frac{R_1^5 R_2^3}{r^5} + \frac{2R_1^5 R_2^5}{r^7} + \frac{3R_1^5 R_2^7}{r^9}, \\
C_{12} &= \frac{R_1^3 R_2^2}{r^2} + \frac{R_1^6 R_2^5}{r^8} + \frac{2R_1^8 R_2^5 + 3R_1^6 R_2^7}{r^{10}}, \\
C_{21} &= \frac{R_1^2 R_2^3}{r^2} + \frac{R_1^5 R_2^6}{r^8} + \frac{2R_1^5 R_2^8 + 3R_1^7 R_2^6}{r^{10}}, \\
C_{22} &= \frac{R_1^3 R_2^5}{r^5} + \frac{2R_1^5 R_2^5}{r^7} + \frac{3R_1^7 R_2^5}{r^9}, \\
D_1 &= R_1^3 + \frac{R_1^4 R_2^3}{2r^4} + \frac{2R_1^4 R_2^5}{3r^6} + \frac{3R_1^4 R_2^7}{4r^8} + \frac{\frac{1}{2}R_1^7 R_2^6 + \frac{4}{5}R_1^4 R_2^9}{r^{10}}, \\
E &= \frac{R_1^2 R_2^2}{r} + \frac{R_1^5 R_2^5}{2r^7} + \frac{R_1^7 R_2^5 + R_1^5 R_2^7}{r^9}, \\
D_2 &= R_2^3 + \frac{R_1^3 R_2^4}{2r^4} + \frac{2R_1^5 R_2^4}{3r^6} + \frac{3R_1^7 R_2^4}{4r^8} + \frac{\frac{1}{2}R_1^6 R_2^7 + \frac{4}{5}R_1^9 R_2^4}{r^{10}}.
\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Кинетическая энергия представлена в работе [47] как:

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\rho_l \left(R_1^3 \left(\dot{R}_1^2 + \frac{\dot{z}_1^2}{6} \right) + R_1^3 \left(f_1 \dot{R}_1^2 + f_4 \dot{R}_1 \dot{z}_1 + f_5 \dot{z}_1^2 \right) + \right. \\
&+ R_1^2 R_2 \left(f_2 \dot{R}_1 \dot{R}_2 + f_6 \dot{R}_2 \dot{z}_1 + f_3 \dot{R}_1 \dot{z}_2 - f_7 \dot{z}_1 \dot{z}_2 \right) + \\
&+ R_2^3 \left(\dot{R}_2^2 + \frac{\dot{z}_2^2}{6} \right) + R_2^3 \left(g_1 \dot{R}_2^2 - g_4 \dot{R}_2 \dot{z}_2 + g_5 \dot{z}_2^2 \right) + \\
&\left. + R_1 R_2^2 \left(g_2 \dot{R}_1 \dot{R}_2 + g_3 \dot{R}_2 \dot{z}_1 + g_6 \dot{R}_1 \dot{z}_2 + g_7 \dot{z}_1 \dot{z}_2 \right) \right),
\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

при этом сохранены обозначения работы [47]. Подставляя выражения для f_i, g_i из Supplemental Material работы [47], а также подставляя $\dot{z}_1 \rightarrow u_1, \dot{z}_2 \rightarrow$

$-u_2$, $D \rightarrow r$, получим разложения до $o(r^{-10})$ для коэффициентов кинетической энергии:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{R_1^3}{6} + \frac{R_1^6 R_2^3}{2r^6} + \frac{R_1^6 R_2^5}{r^8} + \frac{2R_1^6 R_2^7}{r^{10}}, \\
B &= \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} + \frac{R_1^6 R_2^6}{2r^9}, \\
A_2 &= \frac{R_2^3}{6} + \frac{R_1^3 R_2^6}{2r^6} + \frac{R_1^5 R_2^6}{r^8} + \frac{2R_1^7 R_2^6}{r^{10}}, \\
C_{11} &= \frac{R_1^5 R_2^3}{r^5} + \frac{5R_1^5 R_2^5}{3r^7} + \frac{5R_1^5 R_2^7}{2r^9}, \\
C_{12} &= \frac{R_1^3 R_2^2}{r^2} + \frac{R_1^6 R_2^5}{r^8} + \frac{R_1^6 R_2^7 + R_1^8 R_2^5}{r^{10}}, \\
C_{21} &= \frac{R_1^2 R_2^3}{r^2} + \frac{R_1^5 R_2^6}{r^8} + \frac{R_1^7 R_2^6 + R_1^5 R_2^8}{r^{10}}, \\
C_{22} &= \frac{R_1^3 R_2^5}{r^5} + \frac{5R_1^5 R_2^5}{3r^7} + \frac{5R_1^7 R_2^5}{2r^9}, \\
D_1 &= R_1^3 + \frac{R_1^4 R_2^3}{2r^4} + \frac{2R_1^4 R_2^5}{3r^6} + \frac{3R_1^4 R_2^7}{4r^8} + \frac{R_1^7 R_2^6}{2r^{10}}, \\
E &= \frac{R_1^2 R_2^2}{r} + \frac{R_1^5 R_2^5}{2r^7} + \frac{R_1^7 R_2^5 + R_1^5 R_2^7}{2r^9}, \\
D_2 &= R_2^3 + \frac{R_1^3 R_2^4}{2r^4} + \frac{2R_1^5 R_2^4}{3r^6} + \frac{3R_1^7 R_2^4}{4r^8} + \frac{R_1^6 R_2^7}{2r^{10}}.
\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

И так видим, что совпадение коэффициентов [47] с точными коэффициентами наблюдается до r^{-6} .

2.7 Асимптотические разложения вблизи контакта

Для получения асимптотического разложения кинетической энергии жидкости вблизи контакта, воспользуемся методикой работ Raszillier *et al.* [74] (для сфер равных радиусов), Raszillier *et al.* [75] (для произвольных радиусов). В этих работах методика представлена для твердых сфер, то есть для коэффициентов A_1, A_2, B . Предлагается развитие этой методики для случая переменных радиусов, то есть для остальных семи коэффициентов.

Коэффициент $A_1 = \frac{R_1^3}{6} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}$ запишем в виде:

$$A_1 = \frac{R_1^3}{6} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(1+\lambda_1)t}}{1 - e^{-t}} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}, \quad (2.7.1)$$

$$t = (2n-1)(\tau_1 + \tau_2), \quad \lambda_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Подставим под знаком суммы преобразование Меллина

$$\frac{e^{-(1+\lambda_1)t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} \Gamma(s) \zeta(s, 1 + \lambda_1) ds, \quad \sigma > 1, \quad \operatorname{Re}(1 + \lambda_1) > 0, \quad (2.7.2)$$

где $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + a)^{-s}$ – дзета функция Гурвица. Тогда получим:

$$A_1 = \frac{R_1^3}{6} + \frac{c^3}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} \left((2n-1)^2 - 1 \right) \Gamma(s) \zeta(s, 1 + \lambda_1) ds \quad (2.7.3)$$

$$= \frac{R_1^3}{6} + \frac{c^3}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z(s) \zeta(s, 1 + \lambda_1) ds, \quad \sigma > 3,$$

где

$$Z(s) = \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)^{-s} \left((2n-1)^2 - 1 \right) = \zeta(s-2)(1 - 2^{-(s-2)}) - \zeta(s)(1 - 2^{-s}), \quad (2.7.4)$$

$\zeta(s) = \zeta(s, 1)$ – дзета функция Римана.

Вычислим интеграл, воспользовавшись теоремой вычетов. Для этого необходимо найти полюса подынтегральной функции. Они расположены в точках: $3, 1, -1, -3, \dots$ и определяют порядки членов асимптотического разложения. Вычет в первой точке определяет главный член разложения, во второй точке – следующий и т.д. Учитывая вычеты в точках $3, 1, -1, \dots, -2l + 1$ получим следующее разложение:

$$A_1 = \frac{R_1^3}{6} + \frac{c^3}{2} \left(\frac{\zeta(3, 1 + \lambda_1)}{(\tau_1 + \tau_2)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \left(\ln \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + \psi(1 + \lambda_1) + \frac{1}{6} \right) - \sum_{k=1}^l \frac{(\tau_1 + \tau_2)^{2k-1}}{(2k-1)!} Z(-2k+1) \zeta(-2k+1, 1 + \lambda_1) \right) + r_{A_1}^{2l-1}, \quad (2.7.5)$$

где $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ – дигамма функция и остаточный член имеет вид:

$$r_{A_1}^m = \frac{c^3}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_m - i\infty}^{\sigma_m + i\infty} (\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z(s) \zeta(s, 1 + \lambda_1) ds, \quad -m - 1 < \sigma_m < -m. \quad (2.7.6)$$

Аналогично для Raszillier *et al.* [75] получил:

$$\begin{aligned} B &= \frac{c^3}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} (\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z(s) \zeta(s) ds = \\ &= \frac{c^3}{2} \left(\frac{\zeta(3)}{(\tau_1 + \tau_2)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \ln \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \left(\psi(1) + \frac{1}{6} \right) - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^n \frac{(\tau_1 + \tau_2)^{2k-1}}{(2k-1)!} Z(-2k+1) \zeta(-2k+1) \right) + r_B^{2l-1}, \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

где r_B^{2l-1} определяется аналогично $r_{A_1}^{2l-1}$.

Приведем асимптотические разложения остальных коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{2c^3}{\text{sh}^2 \tau_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} (\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z_{C12}(s, \lambda_1) ds = \\ &= \frac{2c^3}{\text{sh}^2 \tau_1} \left(-\frac{\text{sh} \tau_1}{2(\tau_1 + \tau_2)^2} \zeta(2, 1 + \lambda_1) + \frac{\text{ch} \tau_1 - 1}{\tau_1 + \tau_2} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma + \text{ch} \tau_1 \psi(1 + \lambda_1)}{2(\tau_1 + \tau_2)} + \frac{\text{sh} \tau_1}{\tau_1 + \tau_2} + \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(\tau_1 + \tau_2)^k}{k!} Z_{C11}(-k, \lambda_1) \right) + r_{C11}^m, \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{2c^3}{\text{sh}^2 \tau_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} (\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z_{C12}(s, \lambda_1) ds = \\ &= \frac{2c^3}{\text{sh}^2 \tau_2} \left(-\frac{\text{sh} \tau_2}{2(\tau_1 + \tau_2)^2} \zeta(2) + \frac{\text{ch} \tau_2 - 1}{\tau_1 + \tau_2} \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{\gamma \text{ch} \tau_2 + \psi(\lambda_1)}{2(\tau_1 + \tau_2)} + \frac{\text{sh} \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} + \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(\tau_1 + \tau_2)^k}{k!} Z_{C12}(-k, \lambda_1) \right) + r_{C12}^m, \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

где

$$\begin{aligned}
Z_{C_{11}}(s, \lambda_1) &= (\zeta(s) - \zeta(s, 1 + \lambda_1) \operatorname{ch} \tau_1) (\zeta(s)(1 - 2^{-s}) - 1) - \\
&\quad - \zeta(s, 1 + \lambda_1) \operatorname{sh} \tau_1 \left(\zeta(s-1)(1 - 2^{-(s-1)}) - 1 \right), \\
Z_{C_{12}}(s, \lambda_1) &= (\zeta(s, \lambda_1) - \zeta(s) \operatorname{ch} \tau_2) (\zeta(s)(1 - 2^{-s}) - 1) - \\
&\quad - \zeta(s) \operatorname{sh} \tau_2 \left(\zeta(s-1)(1 - 2^{-(s-1)}) - 1 \right).
\end{aligned} \tag{2.7.10}$$

Для коэффициентов D_1 , E вывод асимптотического разложения существенно сложнее. Для этого в формулах (2.5.9) соответствующих коэффициентам D_1 , E раскроем скобки. Применяя далее методику работы Raszillier *et al.* [75], получим:

$$\begin{aligned}
D_1 &= R_1^3 + \frac{2c^3}{\operatorname{sh}^4(\tau_1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z_{D_1}(s, \lambda_1) ds + r_{D_1}^m \\
&= R_1^3 + \frac{2c^3}{\operatorname{sh}^4(\tau_1)} \sum_{k=-1}^n \operatorname{res}_{s=-k} \left((\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z_{D_1}(s, \lambda_1) \right) + r_{D_1}^m,
\end{aligned} \tag{2.7.11}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + \frac{2c^3}{\operatorname{sh}^2(\tau_1) \operatorname{sh}^2(\tau_2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z_E(s, \lambda_1, \lambda_2) ds + r_E^m \\
&= \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + \frac{2c^3}{\operatorname{sh}^2(\tau_1) \operatorname{sh}^2(\tau_2)} \sum_{k=-1}^n \operatorname{res}_{s=-k} \left((\tau_1 + \tau_2)^{-s} \Gamma(s) Z_E(s, \lambda_1, \lambda_2) \right) + r_E^m,
\end{aligned} \tag{2.7.12}$$

где:

$$\begin{aligned}
Z_{D_1}(s, k, \lambda_1) &= \zeta(s, 1 - \lambda_1) H(s) - 2 \operatorname{ch}(\tau_1) \zeta(s) H(s) + \\
&\quad + \operatorname{ch}^2(\tau_1) \zeta(s, 1 + \lambda_1) H(s) + \\
&\quad + \operatorname{sh}(2\tau_1) \zeta(s, 1 + \lambda_1) H(s-1) - \\
&\quad - 2 \operatorname{sh}(\tau_1) \zeta(s) H(s-1) + \\
&\quad + \operatorname{sh}^2(\tau_1) \zeta(s, 1 + \lambda_1) H(s-2),
\end{aligned} \tag{2.7.13}$$

$$\begin{aligned}
Z_E(s, k, \lambda_1, \lambda_2) = & \zeta(s)H(s) - \operatorname{ch}(\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)H(s) - \\
& - \operatorname{ch}(\tau_2)\zeta(s, 1 + \lambda_2)H(s) + \\
& + \operatorname{ch}(\tau_1)\operatorname{ch}(\tau_2)\zeta(s, 2)H(s) - \\
& - \operatorname{sh}(\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)H(s - 1) - \\
& - \operatorname{sh}(\tau_2)\zeta(s, 1 + \lambda_2)H(s - 1) + \\
& + \operatorname{sh}(\tau_1 + \tau_2)\zeta(s, 2)H(s - 1) + \\
& + \operatorname{sh}(\tau_1)\operatorname{sh}(\tau_2)\zeta(s, 2)H(s - 2),
\end{aligned} \tag{2.7.14}$$

причем функция

$$H(s) = \sum_{n=2}^{\infty} (2n - 1)^{-s} \frac{1}{(2n - 1)^2 - 1} \tag{2.7.15}$$

принципиально отличается от функции $Z(s) = \sum_{n=2}^{\infty} (2n - 1)^{-s} ((2n - 1)^2 - 1)$, возникающей при определении асимптотического разложения коэффициентов A_1 и B . Функция $Z(s)$ представима, как разность двух дзета функций с соответствующими коэффициентами, что нельзя сказать про функцию $H(s)$. Для $H(s)$ справедливо рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}
H(s) &= \sum_{n=2}^{\infty} (2n - 1)^{-s} \frac{1}{(2n - 1)^2 - 1} = \sum_{n=2}^{\infty} (2n - 1)^{-(s+2)} \frac{(2n - 1)^2 - 1 + 1}{(2n - 1)^2 - 1} = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (2n - 1)^{-(s+2)} \frac{1}{(2n - 1)^2 - 1} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n - 1)^{-(s+2)} = \\
&= H(s + 2) + \zeta(s + 2) \left(1 - 2^{-(s+2)}\right) - 1.
\end{aligned} \tag{2.7.16}$$

Учитывая данное рекуррентное соотношение, а также, то, что $H(0) = 1/4$ и $H(1) = 3/4 - \ln 2$, после некоторых преобразований получим:

$$D_1 = R_1^3 + \frac{2c^3}{\operatorname{sh}^4(\tau_1)} \sum_{k=-1}^n \operatorname{res}_{s=-k} \left(\Gamma(s) (\tau_1 + \tau_2)^{-s} Y_{D_1}(s, k, \lambda_1) \right) + r_{D_1}^m, \tag{2.7.17}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2c^3}{\operatorname{sh}^2(\tau_1)\operatorname{sh}^2(\tau_2)} \sum_{k=-1}^n \operatorname{res}_{s=-k} \left(\Gamma(s) (\tau_1 + \tau_2)^{-s} Y_E(s, k, \lambda_1, \lambda_2) \right) \\
&+ \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + r_E^m,
\end{aligned} \tag{2.7.18}$$

где:

$$\begin{aligned}
Y_{D_1}(s, k, \lambda_1) = & \zeta(s, 1 - \lambda_1)F(s, k) - 2 \operatorname{ch}(\tau_1)\zeta(s)F(s, k) \\
& + \operatorname{ch}^2(\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)F(s, k) \\
& + \operatorname{sh}(2\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)F(s - 1, k + 1) \\
& - 2 \operatorname{sh}(\tau_1)\zeta(s)F(s - 1, k + 1) \\
& + \operatorname{sh}^2(\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)F(s - 2, k + 2),
\end{aligned} \tag{2.7.19}$$

$$\begin{aligned}
Y_E(s, k, \lambda_1, \lambda_2) = & \zeta(s)F(s, k) - \operatorname{ch}(\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)F(s, k) \\
& - \operatorname{ch}(\tau_2)\zeta(s, 1 + \lambda_2)F(s, k) \\
& + \operatorname{ch}(\tau_1) \operatorname{ch}(\tau_2)\zeta(s, 2)F(s, k) \\
& - \operatorname{sh}(\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)F(s - 1, k + 1) \\
& - \operatorname{sh}(\tau_2)\zeta(s, 1 + \lambda_2)F(s - 1, k + 1) \\
& + \operatorname{sh}(\tau_1 + \tau_2)\zeta(s, 2)F(s - 1, k + 1) \\
& + \operatorname{sh}(\tau_1) \operatorname{sh}(\tau_2)\zeta(s, 2)F(s - 2, k + 2),
\end{aligned} \tag{2.7.20}$$

$$F(s, k) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{k}{2} + \sum_{j=0}^{k/2-1} \zeta(s + k - 2j)(1 - 2^{-(s+k-2j)}), & k - \text{четное,} \\ \frac{1}{4} - \frac{k}{2} - \ln 2 + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \zeta(s + k + 1 - 2j)(1 - 2^{-(s+k+1-2j)}) \\ + \zeta(s + k + 1)(1 - 2^{-(s+k+1)}), & k - \text{нечетное.} \end{cases} \tag{2.7.21}$$

После взятия вычета окончательно получим для D_1, E :

$$\begin{aligned}
D_1 = & R_1^3 + \frac{2c^3}{\operatorname{sh}^4(\tau_1)} \left(-\frac{\operatorname{ch} \tau_1 - 1}{2(\tau_1 + \tau_2)} \left(\psi(1 + \lambda_1) - \operatorname{sh} \tau_1 + 2 + \right. \right. \\
& + \operatorname{ch}(\tau_1)(\psi(1 + \lambda_1) + \ln(\tau_1 + \tau_2) - 1 + 3 \ln 2) + \ln \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \left. \right) + \\
& + \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(\tau_1 + \tau_2)^k}{k!} W_{D_1}(k, \lambda_1) \left. \right) + r_{D_1}^m,
\end{aligned} \tag{2.7.22}$$

$$\begin{aligned}
E = & \frac{(R_1 R_2)^2}{r} + \frac{2c^3}{\text{sh}^2(\tau_1)\text{sh}^2(\tau_2)} \left(\frac{\text{sh}(\tau_1)\text{sh}(\tau_2)}{\tau_1 + \tau_2} \cdot \right. \\
& \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln(2(\tau_1 + \tau_2)) - \frac{3}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{4} \frac{\text{sh}(\tau_1 + \tau_2) - \text{sh}(\tau_1) - \text{sh}(\tau_2)}{\tau_1 + \tau_2} + \\
& + \left(\frac{3}{4} - \ln 2 \right) \frac{(\text{ch}(\tau_1) - 1)(\text{ch}(\tau_2) - 1)}{\tau_1 + \tau_2} + \\
& \left. + \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(\tau_1 + \tau_2)^k}{k!} W_E(k, \lambda_1) \right) + r_E^m,
\end{aligned} \tag{2.7.23}$$

где

$$\begin{aligned}
W_{D1}(k, \lambda_1) = & \zeta(-k, 1 - \lambda_1)G(k) - 2 \text{ch}(\tau_1)\zeta(-k)G(k) + \\
& + \text{ch}^2(\tau_1)\zeta(-k, 1 + \lambda_1)G(k) + \\
& + \text{sh}(2\tau_1)\zeta(-k, 1 + \lambda_1)G(k + 1) + \\
& - 2 \text{sh}(\tau_1)\zeta(-k)G(k + 1) + \\
& + \text{sh}^2(\tau_1)\zeta(-k, 1 + \lambda_1)G(k + 2) + \\
& + \frac{1}{2} \begin{cases} \text{sh}(2\tau_1) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1 + \lambda_1) + L(k)\zeta(-k, 1 + \lambda_1) \right) - \\ - 2 \text{sh}(\tau_1) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1) + L(k)\zeta(-k, 1) \right), & k - \text{четное,} \\ \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1 - \lambda_1) + L(k)\zeta(-k, 1 - \lambda_1) \right) - \\ - 2 \text{ch}(\tau_1) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1) + L(k)\zeta(-k, 1) \right) + \\ + \text{ch}(2\tau_1) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1 + \lambda_1) + L(k)\zeta(-k, 1 + \lambda_1) \right), & k - \text{нечетное,} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.7.24}$$

$$\begin{aligned}
W_E(s, k, \lambda_1, \lambda_2) = & \zeta(s)G(k) - \operatorname{ch}(\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)G(k) - \\
& - \operatorname{ch}(\tau_2)\zeta(s, 1 + \lambda_2)G(k) + \\
& + \operatorname{ch}(\tau_1)\operatorname{ch}(\tau_2)\zeta(s, 2)G(k) - \\
& - \operatorname{sh}(\tau_1)\zeta(s, 1 + \lambda_1)G(k + 1) - \\
& - \operatorname{sh}(\tau_2)\zeta(s, 1 + \lambda_2)G(k + 1) + \\
& + \operatorname{sh}(\tau_1 + \tau_2)\zeta(s, 2)G(k + 1) + \\
& + \operatorname{sh}(\tau_1)\operatorname{sh}(\tau_2)\zeta(s, 2)G(k + 2) + \\
+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sh}(\tau_1 + \tau_2) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 2) + L(k)\zeta(-k, 2) \right) - \\ - \operatorname{sh}(\tau_1) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1 + \lambda_1) + L(k)\zeta(-k, 1 + \lambda_1) \right) - \\ - \operatorname{sh}(\tau_2) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1 + \lambda_2) + L(k)\zeta(-k, 1 + \lambda_2) \right), \quad k - \text{четное,} \\ \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1) + L(k)\zeta(-k, 1) \right) - \\ - \operatorname{ch}(\tau_1) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1 + \lambda_1) + L(k)\zeta(-k, 1 + \lambda_1) \right) - \\ - \operatorname{ch}(\tau_2) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 1 + \lambda_2) + L(k)\zeta(-k, 1 + \lambda_2) \right) - \\ + \operatorname{ch}(\tau_1 + \tau_2) \left(\zeta^{(1,0)}(-k, 2) + L(k)\zeta(-k, 2) \right), \quad k - \text{нечетное,} \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{2.7.25}$$

$$G(k) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{k}{2}, & k - \text{четное,} \\ \frac{1}{4} - \frac{k}{2} - \ln 2 + \sum_{j=1}^{(k-1)/2} \zeta(1 - 2j)(1 - 2^{-(1-2j)}), & k - \text{нечетное,} \end{cases} \tag{2.7.26}$$

$$L(k) = H_k - \ln \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \quad H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}. \tag{2.7.27}$$

Как раньше отмечалось A_2, C_{22}, C_{21}, D_2 находятся перестановкой индексов.

2.8 Оценки остаточных членов

По Пуанкаре [28] разложение $X = \sum_{n=0}^m X_n(\varepsilon) + R_X^m(\varepsilon)$ является асимптотическим по параметру ε , если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{R_X^m}{X^m} \right| = 0$.

Для определенности рассмотрим разложение A_1 (2.7.5). Представим его в виде

$$A_1 = x_{A_1}^0 + \sum_{k=1}^l x_{A_1}^{2k-1} + r_{A_1}^{2l-1}, \quad (2.8.1)$$

где

$$x_{A_1}^{2k-1} = -\frac{R_1^3 \operatorname{sh}^3 \tau_1 (\tau_1 + \tau_2)^{2k-1}}{2 (2k-1)!} Z(-2k+1) \zeta(-2k+1, 1 + \lambda_1). \quad (2.8.2)$$

Докажем, что $\lim_{\tau_1 + \tau_2 \rightarrow 0} \left| \frac{r_{A_1}^{2l-1}}{x_{A_1}^{2l-1}} \right| = 0$.

Для выражения:

$$\begin{aligned} |r_{A_1}^{2l-1}| &= \frac{R_1^3 \operatorname{sh}^3 \tau_1}{2} \frac{1}{2\pi} (\tau_1 + \tau_2)^{-\sigma_{2l-1}} \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\sigma_{2l-1} + it) Z(\sigma_{2l-1} + it) \zeta(\sigma_{2l-1} + it, 1 + \lambda_1)| dt, \quad (2.8.3) \\ &-2l < \sigma_{2l-1} < -2l + 1, \end{aligned}$$

Raszillier *et al.* [75] получил оценку:

$$|r_{A_1}^{2l-1}| = O\left((\tau_1 + \tau_2)^{2l-1+3}\right). \quad (2.8.4)$$

Также следует отметить, что

$$|x_{A_1}^{2l-1}| = O\left((\tau_1 + \tau_2)^{2l-1+3}\right). \quad (2.8.5)$$

Оказывается можно доказать и более сильное утверждение

$$|r_{A_1}^{2l-1}| = o\left((\tau_1 + \tau_2)^{2l-1+3}\right). \quad (2.8.6)$$

Для этого заметим

$$\begin{aligned} |r_{A_1}^{2l-1}| &= |x_{A_1}^{2l+1} + r_{A_1}^{2l+1}| \leq |x_{A_1}^{2l+1}| + |r_{A_1}^{2l+1}| = O\left((\tau_1 + \tau_2)^{2l+1+3}\right) = \\ &= o\left((\tau_1 + \tau_2)^{2l-1+3}\right) \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

и

$$\lim_{\tau_1 + \tau_2 \rightarrow 0} \left| \frac{r_{A_1}^{2l-1}}{x_{A_1}^{2l-1}} \right| = \lim_{\tau_1 + \tau_2 \rightarrow 0} \frac{o\left((\tau_1 + \tau_2)^{2l-1+3}\right)}{O\left((\tau_1 + \tau_2)^{2l-1+3}\right)} = 0 \quad (2.8.8)$$

тем самым мы доказали, что разложение A_1 является асимптотическим. При этом ряд расходится для любых $\tau_1 + \tau_2 > 0$ и для вычислений нужно ограничиться конечным числом членов ряда.

Как отмечалось в книге Dingle [44] целесообразно обрезать суммирование асимптотического ряда при $m = \eta$, где η находится из условия $\left. \frac{d|x_{A_1}^m|}{dm} \right|_{\eta} \sim 0$.

Оценим зависимость $x_{A_1}^m$ при больших значениях m . Учитывая тождества

$$\zeta(-m, a+1) = \zeta(-m, a) + a^m \quad (2.8.9)$$

и формулу Гурвица [30]

$$\zeta(1-m, a) = 2 \frac{(m-1)!}{(2\pi)^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi na - \frac{1}{2}\pi m)}{n^m}, \quad 1 \geq a \geq 0, \quad m \geq 1, \quad (2.8.10)$$

$\zeta(-m, a)$ может быть аппроксимирована для больших m и для $0 \leq a \leq 2$ как

$$\zeta(-m, a) \approx 2 \frac{m!}{(2\pi)^{m+1}} \cos\left(2\pi a - \frac{\pi}{2}(m+1)\right) \approx 2 \frac{m!}{(2\pi)^{m+1}}, \quad (2.8.11)$$

тогда $x_{A_1}^m$ можно оценить как

$$\begin{aligned} \frac{x_{A_1}^m}{\bar{R}^3} &\sim (\tau_1 + \tau_2)^3 \frac{(\tau_1 + \tau_2)^m}{m!} \frac{2 \frac{(m+3)!}{(2\pi)^{m+3}}}{m+3} \frac{2 \frac{(m+1)!}{(2\pi)^{m+1}}}{m+1} \sim \frac{(\tau_1 + \tau_2)^{m+3} (m+2)!}{(2\pi)^{2m+4}} 2^{m+4} \sim \\ &\sim 4(\tau_1 + \tau_2) \frac{(2(\tau_1 + \tau_2))^{m+2} (m+2)!}{(2\pi)^{2m+4}} \sim \\ &\sim 4(\tau_1 + \tau_2) \sqrt{2\pi(m+2)} \left(\frac{(\tau_1 + \tau_2)(m+2)}{2\pi^2 e} \right)^{(m+2)}. \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

Напомним, что $\bar{R} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Из условия $\left. \frac{d|x_{A_1}^m|}{dm} \right|_{\eta} \sim 0$ получаем $\eta \sim \frac{2\pi^2}{\tau_1 + \tau_2}$. А

вблизи контакта, учитывая формулу (2.3.7), получим $\eta \sim \frac{2\pi^2}{\sqrt{2h/\bar{R}}}$. Аналогично вычисляются значения η для всех других коэффициентов. При таком выборе η погрешность имеет порядок $e^{-\eta}$.

Для подтверждения данной оценки на Рис. 2.2 – 2.4 представлены зависимости модуля остаточного члена $|r_X^m|$ ($X = \{A_1, C_{11}, D_1\}$) от номера m для разных расстояний между пузырьками $h/\bar{R} = \{2, 1, 0.5, 0.2, 0.1\}$, что соответствует

$\eta \approx \{10, 14, 20, 31, 44\}$ и для разных отношений радиусов $R_2/R_1 = \{1, 3, 10\}$ (для определенности $R_1 = 1$).

Как мы видим минимальное значение модуля остаточного члена достигается при m около η . Отличие между m и η объясняется тем, что ряд остаточного члена не является знакопеременным, то есть при некотором большом m остаточный член меняет знак с одного на другой и при этом достигается минимальное значение модуля остаточного члена. Как отмечалось в книге [44] смена знака происходит около $m \sim \eta$. Таким образом в задачах взаимодействия сферических газовых пузырьков вблизи контакта нет необходимости в разложениях коэффициентов кинетической энергии по степеням $\tau_1 + \tau_2$ или h больше чем до $(\tau_1 + \tau_2)^m$ или $h^{m/2}$, причем $m/2 \approx \pi^2 / \sqrt{2h_{\max}/\bar{R}}$, где h_{\max} – ожидаемое максимальное расстояние при движении сфер. Если рассматривать $h_{\max} \approx \bar{R}$ получим что $m/2 \approx 7$, а остаточный член можно оценить как $e^{-m} \approx 10^{-6}$. В работе [74] для случая $R_2/R_1 = 1$ рассматривалось $h \geq 1.6\bar{R}$ и при этом минимальная ошибка достигалась при одном и том же $m = 7$. В работе [75] при $R_2/R_1 \rightarrow \infty$ рассматривались $0.4\bar{R} \leq h \leq 2\bar{R}$ и было замечено, что для $h \geq 0.8\bar{R}$ минимальная ошибка также не зависела от m , при этом $m = 17$. Такое поведение ошибки объясняется свойствами $\zeta(-m, a)$ при небольших m .

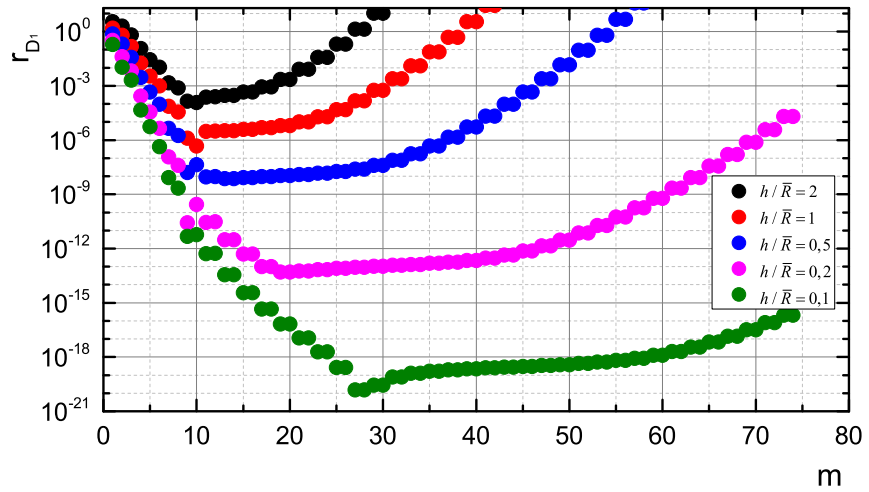
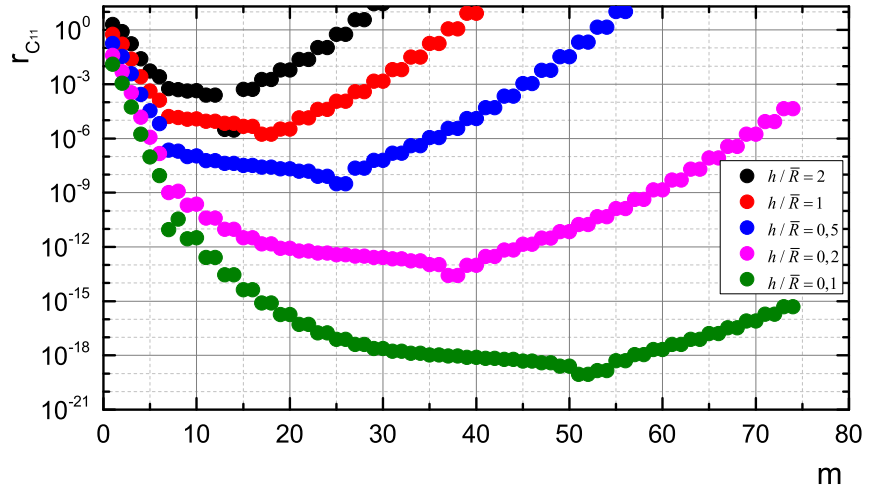
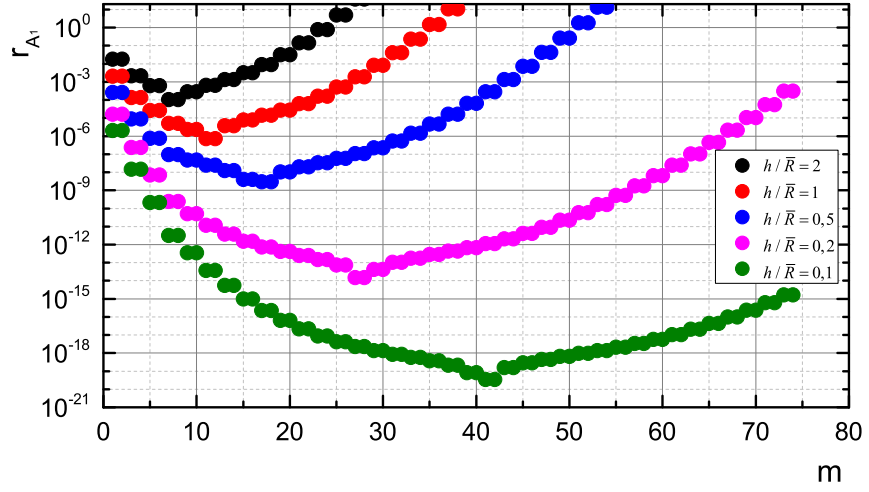


Рис. 2.2: Остаточный член $|r_X^m|$ ($X = \{A_1, C_{11}, D_1\}$) в зависимости от m для разных расстояний между пузырьками: $h/\bar{R} = \{2, 1, 0.5, 0.2, 0.1\}$ при $R_2/R_1 = 1$.

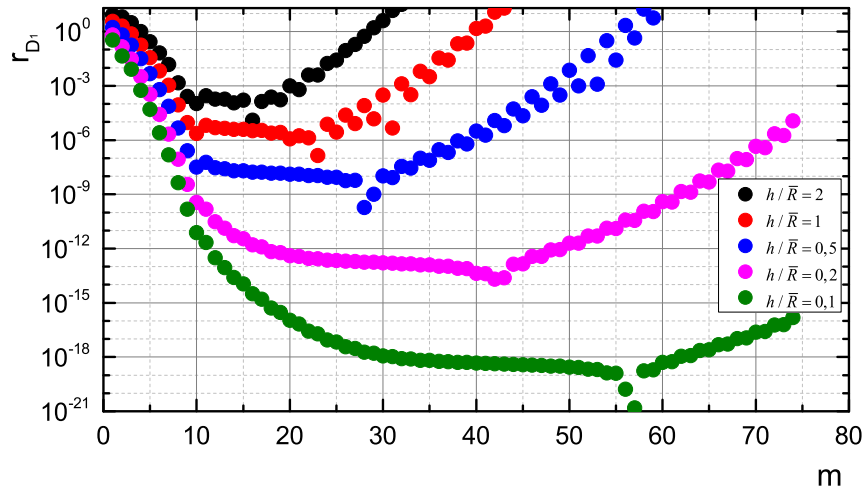
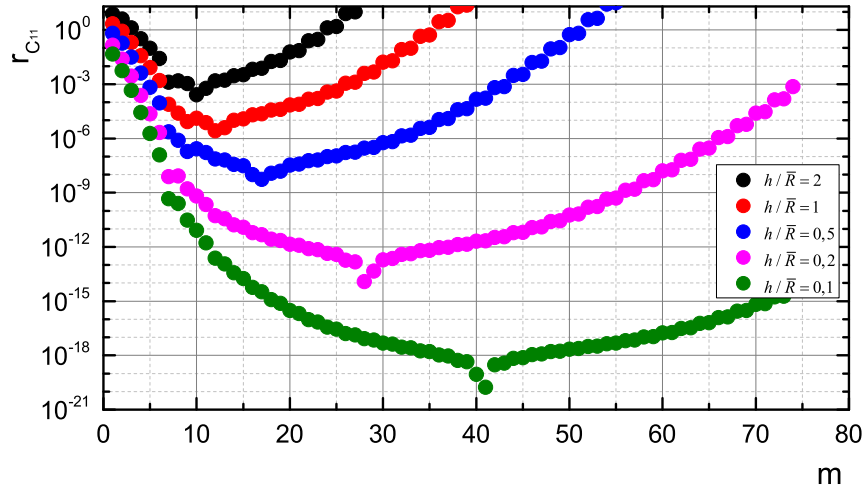
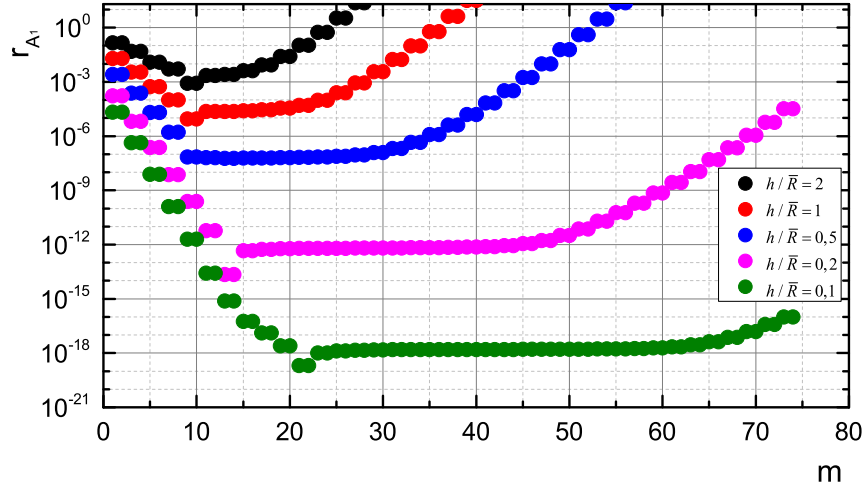


Рис. 2.3: Остаточный член $|r_X^m|$ ($X = \{A_1, C_{11}, D_1\}$) в зависимости от m для разных расстояний между пузырьками: $h/\bar{R} = \{2, 1, 0.5, 0.2, 0.1\}$ при $R_2/R_1 = 3$.

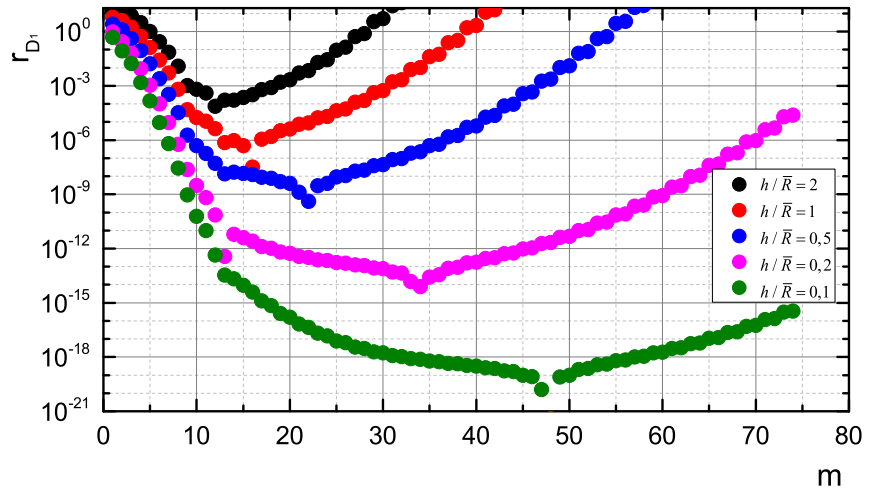
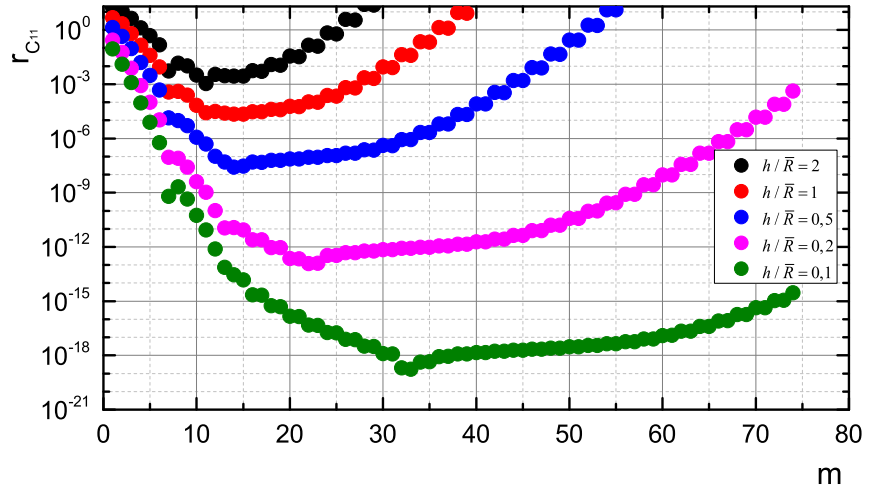
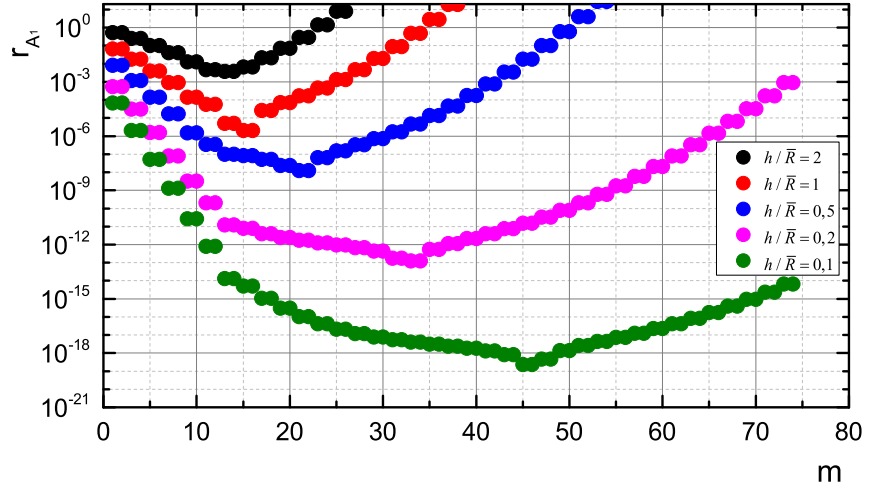


Рис. 2.4: Остаточный член $|r_X^m|$ ($X = \{A_1, C_{11}, D_1\}$) в зависимости от m для разных расстояний между пузырьками: $h/\bar{R} = \{2, 1, 0.5, 0.2, 0.1\}$ при $R_2/R_1 = 10$.

2.9 Разложение по малому зазору h между сферами

Для практических целей более удобно перейти от параметра $\tau_1 + \tau_2$ к зазору h . Тогда разложение коэффициентов кинетической энергии принимает вид

$$X = f_X(h) + g_X(h) \ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right), \quad \bar{R} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad X = \{A_i, B, C_{ij}, D_i, E\}. \quad (2.9.1)$$

Необходимо найти 6 пар функций $f_X(h)$ и $g_X(h)$ для коэффициентов $A_1, B, C_{11}, C_{12}, D_1, E$, итого 12 независимых функций. Для остальных коэффициентов функции $f_X(h)$ и $g_X(h)$ получаются перестановкой индексов. Примечательно, что число независимых функций можно сократить до 10. Для этого докажем, что функции $g_X(h)$ для коэффициентов A_1 и B совпадают и также совпадают функции $g_X(h)$ для коэффициентов C_{11}, C_{21} . Действительно, из формул (2.7.5) и (2.7.7) следует, что коэффициенты g_{A_1}, g_B получаются из члена $\frac{c^3}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \ln \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$, в котором $\tau_1 + \tau_2$ надо выразить через h . Коэффициенты $g_{C_{11}}, g_{C_{21}}$ получаются аналогично из члена $\frac{c^3}{\text{sh}^2 \tau_1} \frac{ch \tau_1 - 1}{\tau_1 + \tau_2} \ln \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$. Функции $f_X(h)$ и $g_X(h)$ можно разложить по степеням h . Достаточная точность достигается кубическими полиномами вида

$$\begin{aligned} f_X(h) &= f_X^0 + f_X^1 h + f_X^2 h^2 + f_X^3 h^3 + O(h^4), \\ g_X(h) &= g_X^1 h + g_X^2 h^2 + g_X^3 h^3 + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

Можно показать, что с точностью до перестановки индексов логарифмическая особенность определяется четырьмя полиномами. Их три первых коэффициента приведены в таблице 2.1 ($\alpha_i = R_i / (R_1 + R_2)$).

Таблица 2.1: Аналитический вид g_X^1, g_X^2, g_X^3 для коэффициентов кинетической энергии

X	g_X^1	g_X^2	g_X^3
A_1, B	$\frac{\bar{R}^2}{4}$	$\frac{5\bar{R}}{24} (\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2)$	$\frac{13\alpha_1^4 - 98\alpha_1^3 \alpha_2 + 183\alpha_2^2 \alpha_1^2 - 98\alpha_1 \alpha_2^3 + 13\alpha_2^4}{360}$
C_{11}, C_{21}	$\frac{\bar{R}^2}{2}$	$\frac{\bar{R}}{12} (5\alpha_1^2 - 5\alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_2^2)$	$\frac{13\alpha_1^4 - 98\alpha_1^3 \alpha_2 + 123\alpha_2^2 \alpha_1^2 - 38\alpha_1 \alpha_2^3 - 2\alpha_2^4}{180}$
D_1	$\frac{\bar{R}^2}{4}$	$\frac{\bar{R}}{24} (5\alpha_1^2 - 5\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2^2)$	$\frac{11}{720} + \frac{\alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 16\alpha_1 \alpha_2 + 4\alpha_2^2)}{48}$
E	$\frac{\bar{R}^2}{4}$	$\frac{\bar{R}}{24} (-2\alpha_1^2 + 5\alpha_1 \alpha_2 - 2\alpha_2^2)$	$\frac{11}{720} - \frac{(\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2)(\alpha_1^2 + 9\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2)}{48}$

Полиномы $f_X(h)$ имеют более громоздкий вид. Поэтому удобнее привести численные значения коэффициентов полиномов $f_X(h)$ при заданном отноше-

нии радиусов. Они приведены в таблицах 2.2-2.4 соответственно для отношений радиусов $R_2/R_1 = \{1, 3, 10\}$.

Таблица 2.2: Численные значения $f_X^0, f_X^1, f_X^2, f_X^3$ для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 1$

X	f_X^0/R_1^3	f_X^1/R_1^3	f_X^2/R_1^3	f_X^3/R_1^3
A_1	0.19257	0.03834	-0.05783	-0.0064
B	0.07513	-0.01375	-0.03339	-0.00841
A_2	0.19257	0.03834	-0.05783	-0.0064
C_{11}	0.07315	0.02403	-0.09609	0.00345
C_{12}	0.28191	-0.12419	-0.04413	-0.00127
C_{21}	0.28191	-0.12419	-0.04413	-0.00127
C_{22}	0.07315	0.02403	-0.09609	0.00345
D_1	1.05634	-0.02539	-0.02837	0.00549
E	0.52088	-0.20799	0.02508	-0.00506
D_2	1.05634	-0.02539	-0.02837	0.00549

Таблица 2.3: Численные значения $f_X^0, f_X^1, f_X^2, f_X^3$ для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 3$

X	f_X^0/R_1^3	f_X^1/R_1^3	f_X^2/R_1^3	f_X^3/R_1^3
A_1	0.22593	0.15456	-0.12096	-0.00727
B	0.25356	0.03244	-0.08352	-0.00943
A_2	4.64004	0.05236	-0.0598	-0.02441
C_{11}	0.18871	0.14903	-0.22995	0.04843
C_{12}	0.65753	0.07208	-0.20445	-0.00445
C_{21}	2273271	-0.59585	0.00243	-0.01
C_{22}	0.3404	0.06923	-0.13721	-0.03191
D_1	1.18701	-0.07682	-0.03699	0.01731
E	2.32151	-0.45781	-0.00579	0.00787
D_2	27.21124	0.019	-0.08045	-0.00683

Таблица 2.4: Численные значения $f_X^0, f_X^1, f_X^2, f_X^3$ для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 10$

X	f_X^0/R_1^3	f_X^1/R_1^3	f_X^2/R_1^3	f_X^3/R_1^3
A_1	0.25175	0.29173	-0.11741	-0.04509
B	0.45156	0.20392	-0.1117	-0.04079
A_2	167.02413	0.16238	-0.09517	-0.03972
C_{11}	0.28907	0.33643	-0.31326	0.03108
C_{12}	0.98412	0.45188	-0.23408	-0.08365
C_{21}	8.51296	-1.12663	-0.13156	0.01537
C_{22}	0.77253	0.34336	-0.20516	-0.07911
D_1	1.35988	-0.10779	-0.0565	0.02402
E	9.22154	-0.64576	-0.09002	0.012
D_2	1000.41854	0.18447	-0.10969	-0.03978

Сходимость приближений коэффициентов A_1 и D_1 полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (жирная линия) показана на Рис. 2а и 3а, а для их производных сходимость показана на Рис. 2б и 3б. Как видно из рисунков с увеличением степени полинома наблюдается значительное повышение точности.

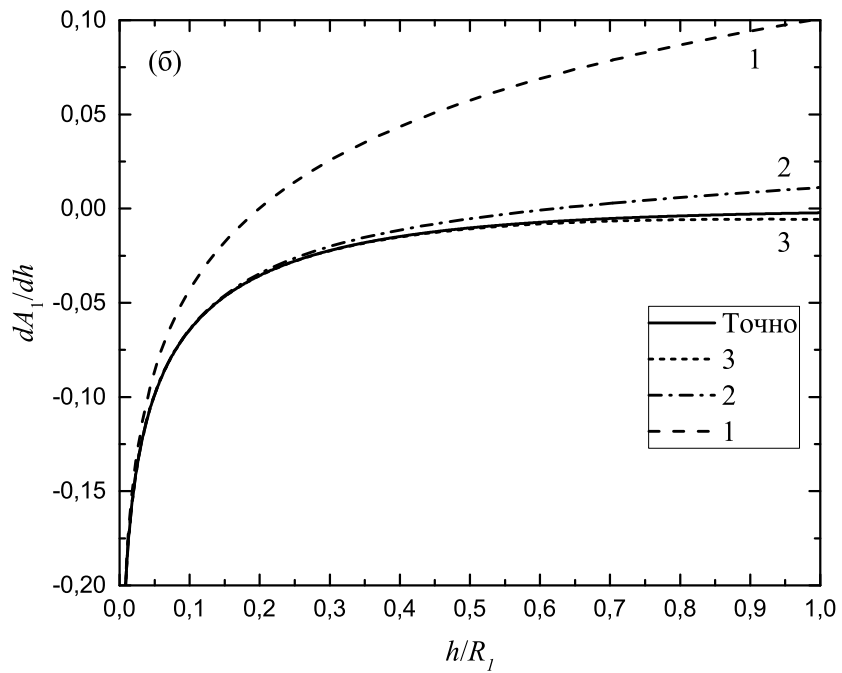
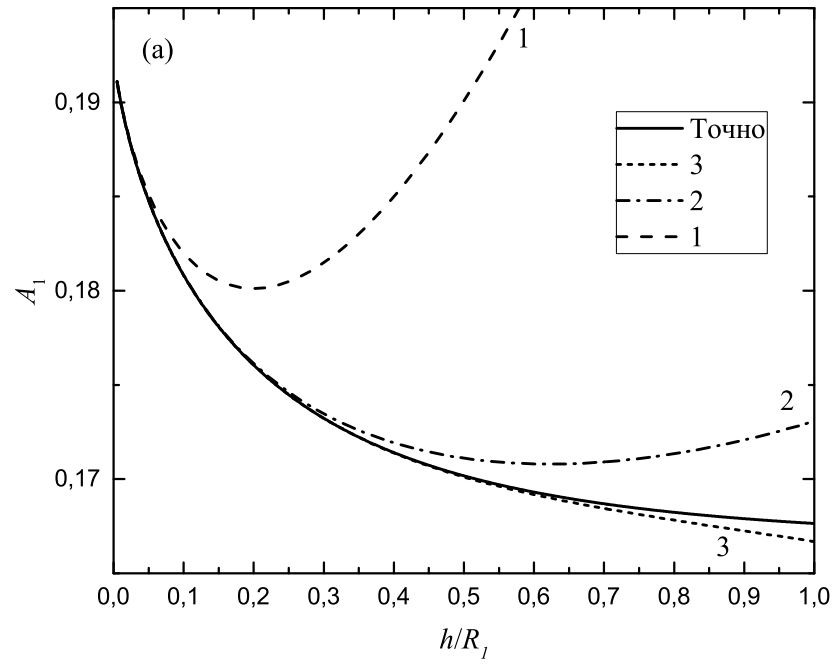


Рис. 2.5: Сходимость приближений (а) коэффициента A_1 и (б) производной dA_1/dh полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (жирная линия).

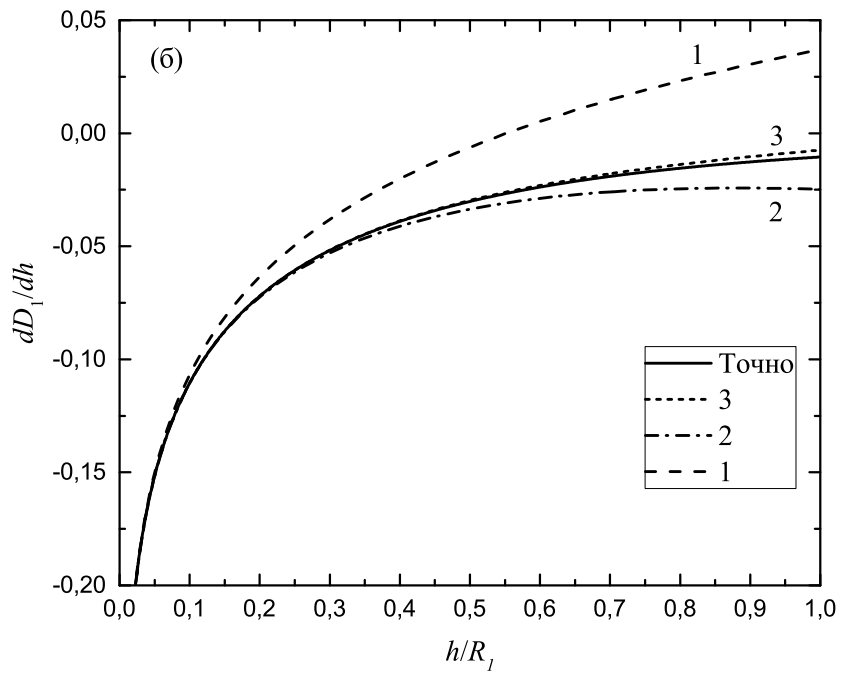
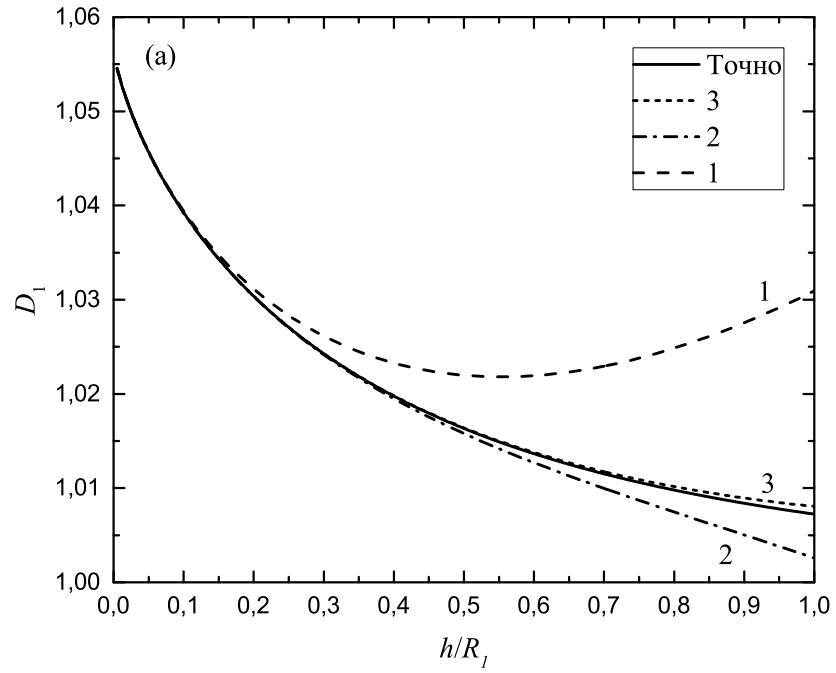


Рис. 2.6: Сходимость приближений (а) коэффициента D_1 и (б) производной dD_1/dh полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (жирная линия).

2.10 Трехчленное разложение кинетической энергии

Из рядов Хикса (2.6.1) и Воинова (2.6.2) можно получить трехчленное разложение кинетической энергии вблизи контакта пузырьков. Сперва заметим, что Воинов О.В. в работе [7] для случая сфер постоянных радиусов предложил определять производную $\partial T/\partial r$ в окрестности контакта с помощью следующего преобразования

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n, \epsilon) = \sum_{n=1}^{[1/\epsilon]} f(n, 0) - \int_1^{1/\epsilon} f(x, 0) dx + \int_1^{\infty} f(x, \epsilon) dx + O(\epsilon), \quad (2.10.1)$$

где $\epsilon = \tau_1 + \tau_2$, причем при стремлении к контакту $r \rightarrow R_1 + R_2$ имеем $\epsilon \rightarrow 0$. Применив преобразование (2.10.1) к A_1 и B , Воинов О.В. нашел [7]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial B}{\partial h} &= \frac{1}{4} \ln \frac{h}{2\bar{R}} + \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} (1 - 3\alpha_1\alpha_2) \zeta(3) + O(h \ln h), \\ \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial A_1}{\partial h} &= \frac{1}{4} \ln \frac{h}{2\bar{R}} + \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{n(n+1)(n-1+3\alpha_2)}{(n+\alpha_2)^4} \right] + O(h \ln h), \\ \bar{R} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad h = r - R_1 - R_2 \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

и заметил, что для коэффициентов A_1 и B разность сумм рядов

$$\frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial A_1}{\partial h} - \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial B}{\partial h} \quad (2.10.3)$$

остаётся конечной, когда сферы сближаются до контакта.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial A_1}{\partial h} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_1}(n, \epsilon), \\ \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial B}{\partial h} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_B(n, \epsilon), \\ f_{A_1, B}(n, \epsilon) &= f_{A_1}(n, \epsilon) - f_B(n, \epsilon). \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

Тогда для разности рядов

$$\frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial A_1}{\partial h} - \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial B}{\partial h} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_1, B}(n, \epsilon), \quad (2.10.5)$$

воспользуемся разбиением бесконечной суммы предложенное в работе [40]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{A_1, B}(n, \epsilon) = \sum_{n=1}^N f_{A_1, B}(n, \epsilon) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_{A_1, B}(n, \epsilon), \quad (2.10.6)$$

причем N выбирается как

$$N = C\epsilon^{-(1-q)}, \quad (2.10.7)$$

где C и q положительные постоянные не зависящие от ϵ . Также q удовлетворяет условию $0 < q < 1$.

После подстановки выражений для $\frac{1}{R^2} \frac{\partial A_1}{\partial h}$ и $\frac{1}{R^2} \frac{\partial B}{\partial h}$ было получено, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{A_1, B}(n, \epsilon) = \sum_{n=1}^N \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{A_1, B}(n, \epsilon) + O(\epsilon^2) \right) + O(\epsilon^{1-q}), \quad (2.10.8)$$

причем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{A_1, B}(n, \epsilon) = O(n^{-2}). \quad (2.10.9)$$

Таким образом при усреднении $\epsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{A_1, B}(n, \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{A_1, B}(n, \epsilon) + o(1). \quad (2.10.10)$$

или окончательно получим

$$\frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial A_1}{\partial h} - \frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial B}{\partial h} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{A_1, B}(n, \epsilon) + o(1). \quad (2.10.11)$$

Если для вычисления $\frac{1}{R^2} \frac{\partial B}{\partial h}$ не требуется больших усилий при применении формулы (2.10.1), то для других коэффициентов $A_1, D_1, E, C_{11}/2, C_{12}/2$ выражение (2.10.11) упрощает для них вывод логарифмического и следующего членов асимптотических разложений.

Действительно, из этого свойства мы приходим к выводу, что все коэффициенты кинетической энергии имеют одинаковую структуру в окрестности контакта

$$\frac{1}{\bar{R}^2} \frac{\partial X}{\partial h} = \frac{1}{4} \ln \frac{h}{2\bar{R}} + X_1 + O(h \ln h), \quad (2.10.12)$$

где X – произвольный коэффициент кинетической энергии, X_1 зависит только от радиусов сфер и не зависят от h .

Разложения для коэффициентов $A_1, B, D_1, E, C_{11}/2, C_{12}/2$ получатся интегрированием с помощью формулы

$$X(h) = X_0 + \int_0^h \frac{dX}{dh} = X_0 + \bar{R}^2 h \left(\frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right) - 1 \right) + X_1 \right). \quad (2.10.13)$$

Это и есть требуемое трехчленное разложение произвольного коэффициента $X(h)$, содержащее постоянное слагаемое X_0 и члены типа $h \ln h$ и h . Остальные члены порядка малости $h^2 \ln h$ и выше опускаем.

Выражение для X_0 можно получить из точных рядов (2.6.1),(2.6.2), подставив в них предельные значения при $\epsilon \rightarrow 0$

$$A_n^i = \frac{n + \alpha_k}{\alpha_k}, \quad B_n^i = \frac{n}{\alpha_i}, \quad \alpha_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2}, \quad (2.10.14)$$

Выпишем зависимости X_0 и X_1 для каждого коэффициента кинетической энергии. Для первых двух A_1 и B они имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= X_0 + \bar{R}^2 h \left(\frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right) - 1 \right) + X_1 \right), \\ X_0 &= R_1^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_2}{n + \alpha_2} \right)^3 \right), \\ X_1 &= \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{n(n+1)(n-1+3\alpha_2)}{(n+\alpha_2)^4} \right], \end{aligned} \quad (2.10.15)$$

$$\begin{aligned} B &= X_0 + \bar{R}^2 h \left(\frac{1}{4} \left(\ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right) - 1 \right) + X_1 \right), \\ X_0 &= \frac{1}{2} \bar{R}^3 \zeta(3), \quad X_1 = \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} (1 - 3\alpha_1 \alpha_2) \zeta(3). \end{aligned} \quad (2.10.16)$$

Остальные коэффициенты $D_1, E, C_{11}/2, C_{12}/2$ вычисляются аналогично по формуле (2.10.13), в которой меняются лишь выражения для X_0 и X_1 .

$$\begin{aligned} D_1 : \quad X_0 &= R_1^3 + R_1^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_2}{n + \alpha_2} \left[1 + \left(\frac{n^2}{\alpha_2^2} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{n^2} \right) \right], \\ X_1 &= \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6n} + \frac{(n-1)(n+1-3\alpha_2)}{3n\alpha_2^2} \left(1 + \frac{n^2}{\alpha_2^2} \ln \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{n^2} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_1^2 - (n+1)\alpha_2}{3n(n+\alpha_2)^2} \right), \end{aligned} \quad (2.10.17)$$

$$\begin{aligned}
E: \quad X_0 &= \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{n(n+1)}{\alpha_1 \alpha_2} \ln \left(1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{n(n+1)} \right) \right) \right], \\
X_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{6(n+1)} + \frac{n^2 - 1 + 3\alpha_1 \alpha_2}{3(n+1)\alpha_1 \alpha_2} \left(1 - \frac{n(n+1)}{\alpha_1 \alpha_2} \ln \left(1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{n(n+1)} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{3(n+1)(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)} \right) + \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{2.10.18}$$

$$\begin{aligned}
C_{11}/2: \quad X_0 &= \frac{R_1^3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_2^3}{n(n+\alpha_2)^2}, \\
X_1 &= \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha_2 n^2 + 3(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_2^2)n + \alpha_2(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + 3\alpha_2^2)}{6n(n+\alpha_2)^3},
\end{aligned} \tag{2.10.19}$$

$$\begin{aligned}
C_{12}/2: \quad X_0 &= \frac{R_1^3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_2^3}{n^2(n-1+\alpha_2)}, \\
X_1 &= \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha_1 n^2 + (3n - 2\alpha_1)(\alpha_1^3 + \alpha_2^3)}{6n^2(n-\alpha_1)^2},
\end{aligned} \tag{2.10.20}$$

где $\gamma \approx 0.577216$ - постоянная Эйлера, остальные коэффициенты кинетической энергии можно получить перестановкой 1 на 2.

Все ряды для X_0 в формулах (2.10.15 - 2.10.20) приведены в статьях [6-8, 10]. Ряды для X_1 в формулах (2.10.17 - 2.10.20) ранее не вычислялись, но они дают в силу вклад, сопоставимый со вкладом от рядов для X_0 .

2.11 Сравнение асимптотических разложений

Raszillier *et al.* [75] сравнил асимптотическое разложение кинетической энергии с трехчленным разложением полученным Воиновым О.В. [7] для двух сфер постоянных радиусов и получил полное совпадение. Также можно сравнить полученные в разделе 2.7 асимптотические разложения коэффициентов кинетической энергии с трехчленным разложением полученным в предыдущем разделе 2.10. Для этого перейдем от $\tau_1 + \tau_2$ к $h = r - R_1 - R_2$. После некоторых преобразований было получено

$$\begin{aligned}
A_1 = & \frac{R_1^3}{6} + \frac{\bar{R}^3}{2} \zeta(3, 1 + \alpha_2) + \frac{\bar{R}^2}{4} h \ln \frac{h}{2p} \\
& + h \frac{\bar{R}^2}{2} \left(\psi(1 + \alpha_2) + (\alpha_1^3 + \alpha_2^3) \zeta(3, 1 + \alpha_2) \right. \\
& \left. + \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \zeta(4, 1 + \alpha_2) + \frac{1}{6} \right), \tag{2.11.1}
\end{aligned}$$

$$B = \frac{\bar{R}^3}{2} \zeta(3) + \frac{\bar{R}^2}{4} h \ln \frac{h}{2\bar{R}} + h \frac{\bar{R}^2}{2} \left((\alpha_1^3 + \alpha_2^3) \zeta(3) - \gamma + \frac{1}{6} \right), \tag{2.11.2}$$

$$\begin{aligned}
D_1 = & R_1^3 \left(1 - \frac{\zeta^{(1,0)}(-1, 1 - \alpha_2) + \zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_2) - 2\zeta^{(1,0)}(-1, 1)}{\alpha_2} \right. \\
& \left. + 2 \ln(\Gamma(1 + \alpha_2)) - \alpha_2(\psi(1 + \alpha_2) - 1) \right) + \frac{\bar{R}^2}{4} h \ln \frac{h}{2p} \\
& + h \left(\frac{\bar{R}^2}{12} + \frac{R_1^2 \bar{R} (R_1 - R_2) (\zeta^{(1,1)}(-1, 1 - \alpha_2) - \zeta^{(1,1)}(-1, 1 + \alpha_2))}{3R_2^2} \right. \\
& - \frac{R_1^2 (\zeta^{(1,0)}(-3, 1 - \alpha_2) + \zeta^{(1,0)}(-3, 1 + \alpha_2))}{3\alpha_2^2} \\
& + R_1^2 (\alpha_1^3 + \alpha_2^3) \frac{(\zeta^{(1,0)}(-1, 1 - \alpha_2) + \zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_2))}{3\alpha_2^2} \\
& - 4R_1^2 \zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_2) + 2R_1^2 \frac{\zeta^{(1,0)}(-2, 1 + \alpha_2)}{\alpha_2} \\
& + R_1^2 \frac{2}{\alpha_2^2} \left(\frac{1}{3} \zeta'(-3) - \alpha_2 \zeta'(-2) \right) + 2R_1^2 \alpha_2 \ln(\Gamma(1 + \alpha_2)) \\
& + R_1^2 \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2^2}{3} \psi(1 + \alpha_2) + R_1^2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)}{3} \zeta(2, 1 + \alpha_2) \\
& \left. - R_1^2 \frac{2}{\alpha_2^2} \left(\frac{1}{3} - \alpha_2 \right) \zeta'(-1) - R_1^2 \alpha_2 \ln 2\pi + R_1^2 \frac{11\alpha_1^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 + 52\alpha_2^2}{36} \right), \tag{2.11.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E = & \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1 + R_2} (1 + \gamma) - R_1 R_2 (R_1 \ln \Gamma(1 + \alpha_1) + R_2 \ln \Gamma(1 + \alpha_2)) \\
& + \frac{R_1^2 R_2^2}{\bar{R}} \left(\zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_1) + \zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_2) - 2\zeta^{(1,0)}(-1, 1) \right) \\
& + \frac{\bar{R}^2}{4} h \ln \frac{h}{2\bar{R}} \\
& + h \left(\frac{\bar{R}^2}{12} + \frac{1}{3} \bar{R} (R_1 - R_2) \left(\zeta^{(1,1)}(-1, 1 + \alpha_2) - \zeta^{(1,1)}(-1, 1 + \alpha_1) \right) \right) \\
& + (R_1 + R_2)^2 \left(\frac{1}{3} \left(\zeta^{(1,0)}(-3, 1 + \alpha_1) + \zeta^{(1,0)}(-3, 1 + \alpha_2) \right) \right. \\
& - \frac{1}{3} \left(\zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_1) + \zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_2) \right) \\
& - \alpha_1 \left(\zeta^{(1,0)}(-2, 1 + \alpha_1) - \zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_1) \right) \\
& \left. - \alpha_2 \left(\zeta^{(1,0)}(-2, 1 + \alpha_2) - \zeta^{(1,0)}(-1, 1 + \alpha_2) \right) \right) \\
& - R_1 R_2 \left(\frac{1}{3} (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1 \psi(1 + \alpha_1) - \alpha_2 \psi(1 + \alpha_2)) \right. \\
& + \frac{1}{3} \gamma (\alpha_1^3 + \alpha_2^3) - 2\zeta'(-1) + \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \left. \right) \\
& + \frac{1}{3} (R_1 + R_2)^2 \left(\zeta'(-1) - 3\zeta'(-2) + 2\zeta'(-3) \right) - \frac{23\bar{R}^2}{36} \Big),
\end{aligned} \tag{2.11.4}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} = & \bar{R} R_1^2 (\gamma + \psi(1 + \alpha_2) - \alpha_2 \zeta(2, 1 + \alpha_2)) + \frac{\bar{R}^2}{2} h \ln \frac{h}{2\bar{R}} \\
& + h \left(\frac{\bar{R}^2}{6} + \frac{R_1^2}{3} (\gamma (\alpha_1^3 + \alpha_2^3) + (\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + 4\alpha_2^2) \psi(1 + \alpha_2)) \right. \\
& - \alpha_2 (\alpha_1^3 + \alpha_1 \alpha_2^2 + 2\alpha_2^2) \zeta(2, 1 + \alpha_2) \\
& \left. - 2\alpha_1 \alpha_2^2 (\alpha_2 - \alpha_1) \zeta(3, 1 + \alpha_2) \right),
\end{aligned} \tag{2.11.5}$$

$$\begin{aligned}
C_{12} = & -\bar{R} R_2^2 (\gamma + \psi(\alpha_2) + \alpha_1 \zeta(2)) + \frac{\bar{R}^2}{2} h \ln \frac{h}{2\bar{R}} \\
& + h \left(\frac{\bar{R}^2}{6} + \frac{R_2^2}{3} (-\gamma (4\alpha_1^3 + 3\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_2^3) - (\alpha_1^3 + \alpha_2^3) \psi(\alpha_2)) \right. \\
& \left. - 2(\alpha_1^3 + \alpha_2^3) \zeta(2) + \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \zeta(2, \alpha_2) \right),
\end{aligned} \tag{2.11.6}$$

где $\alpha_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2}$, $\bar{R} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Полученные выражения (2.11.1-2.11.4)) совпадают с соответствующими выражениями (2.10.15-2.10.18)). Равенство раз-

ложений можно проверить численно или аналитически. Равенство для A_1, B было показано в работе Raszillier *et al.* [75]. C_{11}, C_{12} можно просуммировать явно. Для D_1, E ситуация немного усложняется. Для получения равенства D_1 , воспользуемся уже упомянутым алгоритмом [70] для преобразования сумм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_2}{n + \alpha_2} \left(1 + \left(\frac{n^2}{\alpha_2^2} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{n^2} \right) \right) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j-1)}{j} \left(\frac{\alpha_2^{2j-1}}{n^{2j-1}} - \frac{\alpha_2^{2j}}{n^{2j}} \right), \quad (2.11.7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6n} + \frac{(n-1)(n+1-3\alpha_2)}{3n\alpha_2^2} \left(1 + \frac{n^2}{\alpha_2^2} \ln \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{n^2} \right) \right) + \frac{\alpha_1^2 - (n+1)\alpha_2}{3n(n+\alpha_2)^2} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_2^{2j-1}}{(j+1)n^{2j}} + \frac{(j+2)\alpha_2^{2j-2} - 3(j+2)\alpha_2^{2j-1} - (j+1)\alpha_2^{2j}}{3(j+1)(j+2)n^{2j+1}} \right). \end{aligned} \quad (2.11.8)$$

Двойные суммы следует брать вначале по n , а потом по j .

2.12 Гидродинамическая сила

Гидродинамическая сила, действующая на сферу, определяется по формуле Лагранжа

$$F_1 = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} + \frac{\partial T}{\partial z_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_1} + \frac{\partial T}{\partial h}. \quad (2.12.1)$$

С помощью этой формулы и асимптотических разложений коэффициентов кинетической энергии можно получить разложение силы вблизи контакта с любой степенью точности по h . Вблизи контакта главная асимптотика гидродинамической силы равна [27]

$$\frac{F_1}{2\pi\rho} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{R}^2 h \ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right) \dot{h} \right) + \frac{1}{4} \bar{R}^2 \ln \left(\frac{h}{2\bar{R}} \right) \dot{h}^2, \quad (2.12.2)$$

где $\dot{h} = -(u_1 + u_2 + \dot{R}_1 + \dot{R}_2)$. Данную логарифмическую особенность невозможно получить, если представлять кинетическую энергию в виде конечного ряда по обратным степеням расстояния между центрами пузырьков r .

В работе [80] при рассмотрении расширяющейся по закону $R = \beta t^{1/2}$ сферы, находящейся в контакте с плоскостью, было получено, что сила притяжения к плоскости равна $F = 0.29\pi\beta^4\rho_l$. Этот результат согласуется с силой

$F = 0.288954\pi\beta^4\rho_l$, найденной по асимптотическим разложениям данной работы.

2.13 Выводы

1. Получено точное решение краевой задачи для функции тока (2.4.2) в случае двух сфер переменных радиусов. Оно обобщает решение для твердых сфер.

2. По найденной функции тока выведен новый вид кинетической энергии жидкости, в котором коэффициенты квадратичной формы представлены бесконечными рядами. Показана тождественность новых рядов с ранее полученными рядами Хикса и Воинова. Показано преимущество новых рядов для изучения динамики сферических пузырьков вблизи контакта.

3. Используя новый вид кинетической энергии, найдены асимптотические разложения коэффициентов кинетической энергии вблизи контакта и проведен анализ точности асимптотических разложений.

4. Найденные асимптотические выражения необходимы для описания динамики сферических пузырьков вблизи контакта, а так же для анализа возможности их слияния (например, при акустическом воздействии на них).

2.14 Приложение: Разложение функций по полиномам Гегенбауэра

Для вывода формул (2.4.7-2.4.9) воспользуемся определением полиномов Гегенбауэра через производящую функцию [28]

$$\frac{1}{(1 - 2x\mu + x^2)^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n C_n^\nu(\mu) \quad (2.14.1)$$

подставляя $\nu = -\frac{1}{2}, x = e^{-\tau}$ при $\tau > 0$ и $-1 \leq \mu \leq 1$ получим (2.4.7):

$$(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-(n-1/2)\tau}, \quad (2.14.2)$$

дифференцируя по τ , получим выражение для (2.4.8):

$$\frac{1}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{-(n-1/2)\sqrt{2}}{\operatorname{sh} \tau} e^{-(n-1/2)\tau}. \quad (2.14.3)$$

Чтобы получить формулу (2.4.9) подставим сперва $\nu = \frac{1}{2}$ в (2.14.1) и продифференцируем по μ :

$$\frac{x}{(1-2x\mu+x^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{dC_n^{1/2}(\mu)}{d\mu}. \quad (2.14.4)$$

Ввиду того, что $C_0^\nu(\mu) = 1$ преобразуем (2.14.4) к виду:

$$\frac{1}{(1-2x\mu+x^2)^{3/2}} = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} \frac{dC_{n-1}^{1/2}(\mu)}{d\mu}. \quad (2.14.5)$$

Выразим $\frac{dC_{n-1}^{1/2}(\mu)}{d\mu}$ через $C_n^{-1/2}(\mu)$. Для этой цели, заметим справедливость равенства:

$$\frac{dC_n^\nu(\mu)}{d\mu} = 2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(\mu). \quad (2.14.6)$$

Или при $\nu = -\frac{1}{2}$ получим:

$$\frac{d^2 C_n^{-1/2}(\mu)}{d\mu^2} = -\frac{dC_{n-1}^{1/2}(\mu)}{d\mu}. \quad (2.14.7)$$

Далее учитывая дифференциальное уравнение Гегенбауэра [28]

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 C_n^\nu(\mu)}{d\mu^2} - (2\nu+1)\mu \frac{dC_n^\nu(\mu)}{d\mu} + n(n+2\nu)C_n^\nu(\mu) = 0, \quad (2.14.8)$$

при $\nu = -\frac{1}{2}$ получим:

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 C_n^{-1/2}(\mu)}{d\mu^2} + n(n-1)C_n^{-1/2}(\mu) = 0. \quad (2.14.9)$$

Умножая (2.14.5) на $1-\mu^2$ и учитывая (2.14.7) и (2.14.9) получаем формулу:

$$\frac{1-\mu^2}{(1-2x\mu+x^2)^{3/2}} = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} n(n-1)C_n^{-1/2}(\mu). \quad (2.14.10)$$

Для дальнейшего удобства начнем суммирование с 0 вместо 2, так как для $n=0$ и $n=1$ элементы суммы равны нулю. Подставляя $x = e^{-\tau}, \tau > 0$, окончательно получим для (2.4.9):

$$\frac{1}{2} \frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \sqrt{2} n(n-1) e^{-(n-1/2)\tau}. \quad (2.14.11)$$

2.15 Приложение: Преобразование коэффициентов кинетической энергии

Если для B, C_{11}, C_{12} и D_1 после интегрирования по контуру (2.5.5) получен вид, указанный в (2.5.9), то для A_1 и E были использованы следующие тождества. После интегрирования (2.5.5) A_1 приобретает вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3}c^3 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)e^{-(2n-1)\tau_1} (3 \coth(n-1/2)(\tau_1 + \tau_2) - 1) = \\ &= c^3 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)e^{-(2n-1)\tau_1} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \right). \end{aligned} \quad (2.15.1)$$

Учитывая, что [33]

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)e^{-(2n-1)\tau_1} = \frac{1}{4\text{sh}^3 \tau_1}, \quad (2.15.2)$$

окончательно для A_1 получим:

$$A_1 = \frac{R_1^3}{6} + c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\tau_1}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{(2n-1)^2 - 1}{2}. \quad (2.15.3)$$

После интегрирования (2.5.5) E приобретает вид:

$$\begin{aligned} E &= c^3 e^{-(\tau_1+\tau_2)} \frac{2 + \coth \tau_1 + \coth \tau_2}{2 \text{sh}(\tau_1) \text{sh}(\tau_2)} + \\ &+ c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2n(\tau_1+\tau_2)}}{(e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1) 4n(n-1) \text{sh}^2 \tau_1 \text{sh}^2 \tau_2} \times \\ &\times \left((e^{2n\tau_1} - ne^{2\tau_1} + n - 1) \left(e^{2n\tau_2} + (-ne^{2\tau_2} + n - 1)e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} \right) + \right. \\ &\left. + (e^{2n\tau_2} - ne^{2\tau_2} + n - 1) \left(e^{2n\tau_1} + (-ne^{2\tau_1} + n - 1)e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.15.4)$$

Учитывая вид A_1, B, C_{11}, C_{12} и D_1 , а также из соображений симметрии была рассмотрена разница:

$$E - c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)(\tau_1+\tau_2)}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{2 S_n(\tau_1) S_n(\tau_2)}{(2n-1)^2 - 1}. \quad (2.15.5)$$

Оказалось, что можно просуммировать возникающую бесконечную сумму в

общем виде:

$$\begin{aligned}
 E - c^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)(\tau_1+\tau_2)}}{e^{(2n-1)(\tau_1+\tau_2)} - 1} \frac{2 S_n(\tau_1) S_n(\tau_2)}{(2n-1)^2 - 1} &= c^3 e^{-(\tau_1+\tau_2)} \frac{2 + \coth \tau_1 + \coth \tau_2}{2 \operatorname{sh}(\tau_1) \operatorname{sh}(\tau_2)} - \\
 - c^3 \frac{\coth(\tau_1 + \tau_2) - 1}{4} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} \right) &= \frac{c^3}{\operatorname{sh} \tau_1 \operatorname{sh} \tau_2 \operatorname{sh}(\tau_1 + \tau_2)} = \\
 = \frac{(R_1 R_2)^2}{r}, &
 \end{aligned} \tag{2.15.6}$$

и мы приходим к виду указанному в формуле для кинетической энергии (2.5.9).

Глава 3

Движение двух сфер переменных радиусов вдоль линии центров в вязкой жидкости в приближении Стокса

3.1 Введение

Впервые в точной постановке задача взаимодействия двух твердых сфер (постоянных радиусов) в вязкой жидкости в приближении Стокса рассматривалась в работе [78]. Сферы совершают движение вдоль линии центров и течение жидкости предполагается осесимметричным. С помощью функции тока, найденной в разложении по полиномам Гегенбауэра в бисферических координатах, были найдены точные выражения для вязких сил, действующих на сферы в виде рядов. Выражения, полученные в работе [78], были далее использованы в различных работах для определения главных асимптотик вязких сил, как на больших расстояниях [35], так и вблизи контакта [14, 38, 40]. В работах [38, 40, 58] также представлен подход к определению главных асимптотик вблизи контакта с помощью теории смазочного слоя.

Задача взаимодействия двух твердых сфер также была решена с помощью "метода отражений" , подробное изложение, а также исторические сведения можно найти в монографии [52]. В этой же монографии представлено разложение вязких сил на больших расстояниях, а также найдена сила при движении двух сфер с одинаковыми скоростями в области контакта. Преимуществом метода отражений является его универсальность, сходимость рядов гораздо быстрее, чем в разложениях по обратным степеням r , однако она еще

не достаточна для аналитического изучения процесса сближения пузырьков к контакту.

Разработанный в работе [78] алгоритм был, также применен для точного решения задачи вязкого взаимодействия двух сферических капель жидкости с одинаковой вязкостью [79] и с разными коэффициентами вязкости [51]. Вблизи контакта капелек в работе [14] найдена главная асимптотика вязких сил действующих на капли. При устремлении вязкости капелек к нулю результаты работы [14] будут соответствовать случаю вязкого взаимодействия двух сферических пузырьков постоянных радиусов с нулевым тангенциальным напряжением на границе.

Промежуточным случаем между прилипанием на границе и нулевым тангенциальным напряжением является случай проскальзывания, при котором тангенциальное напряжение пропорционально разности скоростей на поверхности сфер [20, 32, 52]. Для двух твердых сфер задача вязкого взаимодействия с таким условием была рассмотрена в работах [42, 49, 76], причем в решении возникает рекуррентная система, которая разрешается численно. Для нахождения асимптотической зависимости вязкой силы, в работе [57] применялась теория смазочного слоя. Для двух сферических капелек вязкое взаимодействие рассматривалось в работах [15, 50], причем в работе [15] удалось найти асимптотику вязкой силы вблизи контакта.

Задача вязкого взаимодействия двух сфер переменных радиусов в точной постановке рассматривалась в недавней работе [67] в предположении нулевого тангенциального напряжения на поверхностях сфер. В работе [68] была найдена вязкая сила, действующая на сферический пузырек переменного радиуса около стенки, при этом на границе стенки предполагалось условие прилипания, а на поверхности сферы рассматривался общий случай проскальзывания. Безусловно случай пузырька у стенки является придельным случаем двух пузырьков, у одного из которых радиус стремиться к бесконечности. В работе [68] также была применена теория тонкого слоя для сферы переменного радиуса у стенки. С помощью этой же теории в работах [26, 27] была найдена главная асимптотика вязких сил для двух сфер произвольных переменных радиусов с условием прилипания на границе.

Данная глава посвящена точным решениям задачи вязкого взаимодей-

ствия двух сфер произвольных переменных радиусов при различных граничных условиях, применяя методику работы [78], а также выявлению главного асимптотического члена вязких сил вблизи контакта, как из точных решений, так и с помощью теории тонкого слоя, для случая проскальзывания на границах сфер.

3.2 Постановка задачи

Рассматривается взаимодействие двух сферических пузырьков переменных радиусов при движении вдоль линии центров в вязкой жидкости в приближении Стокса. Течение жидкости предполагается осесимметричным. Как и в **Главе 1** центры сфер расположены на оси z , имеют координаты z_1, z_2 , ($z_1 > z_2$), скорости центров равны $u_1 = -\dot{z}_1$, $u_2 = \dot{z}_2$ и направлены на встречу друг друга (Рис. 3.1). Скорости изменения радиусов равны \dot{R}_1, \dot{R}_2 соответственно. Расстояние между центрами сфер $r = z_1 - z_2$, расстояние между поверхностями сфер (зазор) $h = r - R_1 - R_2$. Цель данной главы найти вязкие силы, действующие на сферы как линейные функции скоростей $u_1, u_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2$, коэффициенты которых зависят от радиусов сфер и расстояния между ними.

Следуя работе [78] целесообразно искать решение задачи с помощью функции тока Стокса в бисферических координатах, которое должно удовлетворять уравнению [78]

$$\Phi^4(\psi) = 0, \quad (3.2.1)$$

где в цилиндрических координатах

$$\Phi^2 \equiv \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.2.2)$$

а в бисферических координатах

$$\Phi^2 \equiv \frac{\operatorname{ch} \xi - \mu}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\operatorname{ch} \xi - \mu) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left((\operatorname{ch} \xi - \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right). \quad (3.2.3)$$

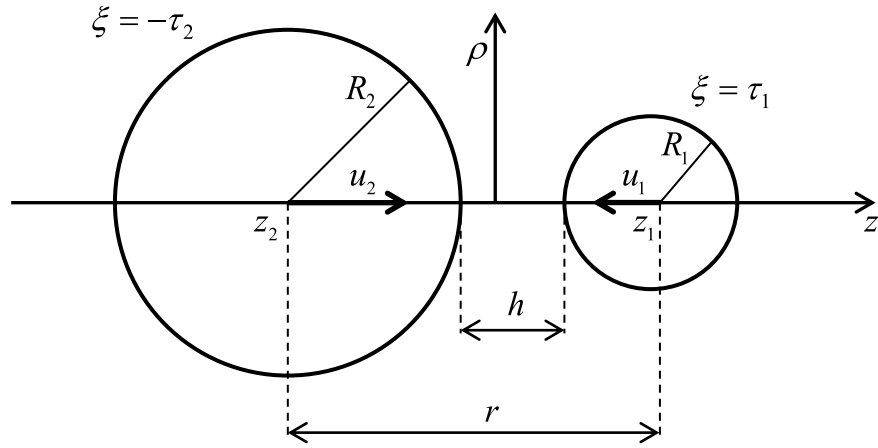


Рис. 3.1: Постановка задачи

3.3 Функция тока в бисферических координатах

Функцию тока следует искать в виде [51, 78]

$$\psi = (\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\xi) C_n^{-1/2}(\cos \zeta),$$

$$U_n(\xi) = a_n \operatorname{ch}(n - 3/2)\xi + b_n \operatorname{sh}(n - 3/2)\xi +$$

$$+ c_n \operatorname{ch}(n + 1/2)\xi + d_n \operatorname{sh}(n + 1/2)\xi, \quad (3.3.1)$$

где $C_n^{-1/2}(\mu)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — полиномы Гегенбауэра. Как и в **Главе 1** при решении задачи с переменными радиусами, суммирование необходимо начинать с $n = 0$. В недавних работах [67, 68] суммирование начинается с $n = 2$ при этом скорость жидкости разбивается на две части: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{visc}} + \nabla \varphi$, где φ выбрано так, что $U_0(\xi)$ и $U_1(\xi)$ оказываются равными нулю.

Коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n следует искать из граничных условий на поверхностях сфер при $\xi = \tau_1$ и $\xi = -\tau_2$. Перейдем к выводу граничных условий. Для вязкой жидкости, кроме условия для нормальной компоненты скорости, следует задавать второе условие на тангенциальную скорость, либо на касательное напряжение. Иногда также ставят комбинированное условие для касательных напряжений и скорости.

3.4 Вязкие силы

Для твердых шаров в работе [78] была получена следующая формула для результирующей силы, действующей на каждый шар

$$F_{\mu_l} = \pi \mu_l \int \rho^3 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\Phi^2(\psi)}{\rho^2} \right) ds, \quad (3.4.1)$$

где n наружная нормаль поверхности сферы, ds — элемент меридиана, μ_l — вязкость жидкости, интеграл берется по меридиану соответствующего шара. Оператор Φ^2 задается формулами (3.2.2) и (3.2.3).

Оказывается формула (3.4.1) справедлива и в случае сфер переменного радиуса. Докажем данное утверждение.

Компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах имеют вид [5]

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu_l \frac{\partial v_z}{\partial z} = -p - \frac{2\mu_l}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \rho}, \quad (3.4.2)$$

$$\sigma_{z\rho} = \mu_l \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) = \mu_l \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right). \quad (3.4.3)$$

Компонента напряжения вдоль оси симметрии z на поверхности сферы равна

$$\begin{aligned} P_z &= -p \frac{\partial \rho}{\partial s} - \mu_l \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \\ &= -p \frac{\partial \rho}{\partial s} - \mu_l \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \Phi^2(\psi) \frac{\partial z}{\partial s} \right). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Если в случае сфер постоянных радиусов P_z можно упростить за счет того, что $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \rho v_\rho = 0$ для любой точки поверхности, то в случае переменных радиусов такое упрощение не имеет место.

Полная сила действующая на сферу направлена вдоль оси симметрии z и равна

$$F_{\mu_l} = \int P_z 2\pi \rho ds = - \int p 2\pi \rho \frac{\partial \rho}{\partial s} ds + 2\pi \mu_l \int \Phi^2(\psi) \frac{\partial z}{\partial s} ds - 4\pi \mu_l \int \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial z} ds. \quad (3.4.5)$$

Рассмотрим подробнее последний интеграл

$$4\pi \mu_l \int \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial z} ds = 4\pi \mu_l \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{s=0}^{s=s_{max}} = 4\pi \mu_l \rho v_\rho \Big|_{s=0}^{s=s_{max}} = 0. \quad (3.4.6)$$

Остальные два интеграла после некоторых преобразований [78] принимают вид (3.4.1).

Таким образом, интегралы для определения вязкой силы имеют одинаковый вид, как для задачи с постоянными радиусами сфер, так и для задачи с переменными радиусами сфер.

Обозначим вязкую силу, действующую на первую сферу, за $F_{\mu 1}$, а на вторую за $F_{\mu 2}$. Подставляя общий вид функции тока (3.3.1) в интеграл (3.4.1) в работе [78] для $n \geq 2$ было получено

$$F_{\mu 1,2}^{2\infty} = \frac{2\sqrt{2}\pi\mu_l}{c} \sum_{n=2}^{\infty} a_n \pm b_n + c_n \pm d_n. \quad (3.4.7)$$

Для $n = 0$ и $n = 1$ нужно отдельно взять интеграл (3.4.1)

$$F_{\mu 1,2}^0 = \frac{2\sqrt{2}\pi\mu_l}{c} \frac{1}{4} \left(\frac{-4c_0 + (c_0 - 3a_0) \operatorname{ch} \tau_{1,2} + (3b_0 - d_0) \operatorname{sh} \tau_{1,2}}{\operatorname{sh}^2 \tau_{1,2}/2} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{4d_0 + (d_0 - 3b_0) \operatorname{ch} \tau_{1,2} + (3a_0 - c_0) \operatorname{sh} \tau_{1,2}}{\operatorname{ch}^2 \tau_{1,2}/2} \right), \quad (3.4.8)$$

$$F_{\mu 1,2}^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi\mu_l}{c} \frac{1}{4} \left(\frac{2a_1 - 2c_1 + (a_1 + 5c_1) \operatorname{ch} \tau_{1,2} + (3d_1 - b_1) \operatorname{sh} \tau_{1,2}}{\operatorname{sh}^2 \tau_{1,2}/2} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{2d_1 - 2b_1 + (5d_1 + b_1) \operatorname{ch} \tau_{1,2} + (3c_1 - a_1) \operatorname{sh} \tau_{1,2}}{\operatorname{ch}^2 \tau_{1,2}/2} \right). \quad (3.4.9)$$

Причем суммарно вязкие силы действующие на сферы в проекции на оси симметрии z равны

$$F_{\mu 1,2} = F_{\mu 1,2}^0 + F_{\mu 1,2}^1 + F_{\mu 1,2}^{2\infty}. \quad (3.4.10)$$

3.5 Граничные условия - нормальная составляющая

Нормальная составляющая скорости жидкости v_n и скорость поверхности пузырька w_n должны совпадать, что можно записать в виде

$$(\mathbf{v}_{1,\mathbf{n}}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta}{c} = -u_1 \left(-\frac{\operatorname{ch} \tau_1 \cos \zeta - 1}{\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta} \right) - \dot{R}_1 = (\mathbf{w}_{1,\mathbf{n}}), \\ (\mathbf{v}_{2,\mathbf{n}}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta}{c} = u_2 \left(-\frac{\operatorname{ch} \tau_2 \cos \zeta - 1}{\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta} \right) + \dot{R}_2 = (\mathbf{w}_{2,\mathbf{n}}). \quad (3.5.1)$$

Проинтегрировав по ζ граничные условия на нормаль (3.5.1) и выбрав константы интегрирования таким образом, чтобы на оси симметрии скорость была параллельна данной оси, получим

$$\begin{aligned}\psi|_{\xi=\tau_1} &= u_1 c^2 \frac{1-\mu^2}{2(\operatorname{ch}\tau_1-\mu)^2} + \dot{R}_1 c^2 \frac{1}{\operatorname{ch}\tau_1-\mu} + \\ &\quad + \left(\frac{\dot{R}_2 c^2}{\operatorname{sh}^2\tau_2} - \frac{\dot{R}_1 c^2 \operatorname{ch}\tau_1}{\operatorname{sh}^2\tau_1} \right), \\ \psi|_{\xi=-\tau_2} &= -u_2 c^2 \frac{1-\mu^2}{2(\operatorname{ch}\tau_2-\mu)^2} - \dot{R}_2 c^2 \frac{1}{\operatorname{ch}\tau_2-\mu} - \\ &\quad - \left(\frac{\dot{R}_1 c^2}{\operatorname{sh}^2\tau_1} - \frac{\dot{R}_2 c^2 \operatorname{ch}\tau_2}{\operatorname{sh}^2\tau_2} \right).\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

Следует отметить, что константы интегрирования оказались равными константам интегрирования в случае потенциального течения жидкости рассмотренного в **Главе 1**. При этом сразу можно выписать коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n для $n=0$ и $n=1$

$$\begin{aligned}a_1 = c_0 = 3c_1 = 3a_0 &= -\frac{3c^2}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\dot{R}_1}{\operatorname{sh}^2\tau_1} - \frac{\dot{R}_2}{\operatorname{sh}^2\tau_2} \right), \\ b_1 = d_0 = 3d_1 = 3b_0 &= -\frac{3c^2}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\dot{R}_1}{\operatorname{sh}^2\tau_1} + \frac{\dot{R}_2}{\operatorname{sh}^2\tau_2} \right)\end{aligned}\tag{3.5.3}$$

и получить для $F_{\mu_1 1}^{01}, F_{\mu_1 2}^{01}$

$$\begin{aligned}F_{\mu_1 1}^{01} &= F_{\mu_1 1}^0 + F_{\mu_1 1}^1 = -\mu_l \frac{8\pi c \dot{R}_1}{\operatorname{sh}^2\tau_1}, \\ F_{\mu_1 2}^{01} &= F_{\mu_1 2}^0 + F_{\mu_1 2}^1 = \mu_l \frac{8\pi c \dot{R}_2}{\operatorname{sh}^2\tau_2}.\end{aligned}\tag{3.5.4}$$

Учитывая общий вид функции тока (3.3.1) преобразуем (3.5.2) к виду

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} U_n(\tau_1) C_n^{-1/2}(\cos\zeta) &= f_0(\mu), \\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n(-\tau_2) C_n^{-1/2}(\cos\zeta) &= g_0(\mu),\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

где введены функции

$$\begin{aligned}
f_0(\mu) &= u_1 c^2 \frac{1}{2} \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2}} + \dot{R}_1 c^2 (\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2} + \\
&+ \left(\frac{\dot{R}_2 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} - \frac{\dot{R}_1 c^2 \operatorname{ch} \tau_1}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \right) (\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{3/2}, \\
g_0(\mu) &= -u_2 c^2 \frac{1}{2} \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2}} - \dot{R}_2 c^2 (\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2} - \\
&- \left(\frac{\dot{R}_1 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} - \frac{\dot{R}_2 c^2 \operatorname{ch} \tau_2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} \right) (\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Далее необходимо разложить $f_0(\mu)$ и $g_0(\mu)$ по полиномам Гегенбауэра с помощью формул приведенных в Приложении 3.9.

3.6 Граничные условия - тангенциальная составляющая

В общем случае на границах сфер относительная скорость жидкости связана с тангенциальным напряжением [20]

$$\begin{aligned}
\sigma_\tau|_{\xi=\tau_1} &= \beta_1 (v_\tau - w_\tau)|_{\xi=\tau_1}, \\
\sigma_\tau|_{\xi=-\tau_2} &= \beta_2 (v_\tau - w_\tau)|_{\xi=-\tau_2},
\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

где $\beta_1 = \mu_l/\lambda_1$ и $\beta_2 = \mu_l/\lambda_2$ – коэффициенты скольжения.

Следует отметить, что в зависимости от $\beta_{1,2}$ можно выделить три разных случая:

1. при $\beta_{1,2} = \infty$ имеем $v_\tau = w_\tau$ — случай прилипания на границе,
2. при $\beta_{1,2} = 0$ имеем $\sigma_\tau = 0$ — случай свободной границы,
3. при $\beta_{1,2} \neq 0, \infty$ имеет место общий случай проскальзывания.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

3.6.1 Случай прилипания на границе

В случае прилипания на границе ($\beta_{1,2} = \infty$) равенство тангенциальных составляющих скоростей $v_\tau = w_\tau$ на поверхности сфер записывается в виде

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_1, \boldsymbol{\tau}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta}{c} = u_1 \frac{\operatorname{sh} \tau_1 \sin \zeta}{\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta} = (\mathbf{w}_1, \boldsymbol{\tau}), \\
(\mathbf{v}_2, \boldsymbol{\tau}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta}{c} = u_2 \frac{\operatorname{sh} \tau_2 \sin \zeta}{\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta} = (\mathbf{w}_2, \boldsymbol{\tau}).
\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Если упростить

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\tau_1} &= -u_1 c^2 \frac{\operatorname{sh} \tau_1 (1 - \mu^2)}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^3}, \\
\left. \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=-\tau_2} &= -u_2 c^2 \frac{\operatorname{sh} \tau_2 (1 - \mu^2)}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^3}.
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Используя общий вид (3.3.1) функции тока ψ , можно получить равенства

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = (\operatorname{ch} \xi - \mu)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} U'_n(\xi) C_n^{-1/2}(\mu) - \frac{3}{2} \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \mu} \psi, \tag{3.6.4}$$

где введено обозначение $U'_n(\xi) = \partial U_n(\xi) / \partial \xi$.

Подставляя равенство (3.6.4) в (3.6.3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} U'_n(\tau_1) C_n^{-1/2}(\mu) &= \frac{3}{2} \operatorname{sh} \tau_1 (\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2} \psi|_{\xi=\tau_1} - \\
&\quad - u_1 c^2 \frac{\operatorname{sh} \tau_1 (1 - \mu^2)}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{3/2}}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} U'_n(-\tau_2) C_n^{-1/2}(\mu) &= -\frac{3}{2} \operatorname{sh} \tau_2 (\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2} \psi|_{\xi=-\tau_2} - \\
&\quad - u_2 c^2 \frac{\operatorname{sh} \tau_2 (1 - \mu^2)}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Подставляя (3.5.2) в (3.6.5), получим

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} U'_n(\tau_1) C_n^{-1/2}(\mu) &= f_1(\mu), \\
\sum_{n=0}^{\infty} U'_n(-\tau_2) C_n^{-1/2}(\mu) &= g_1(\mu),
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
f_1(\mu) &= -u_1 c^2 \frac{1}{4} \frac{\text{sh } \tau_1 (1 - \mu^2)}{(\text{ch } \tau_1 - \mu)^{3/2}} + \dot{R}_1 c^2 \frac{3}{2} \frac{\text{sh } \tau_1}{(\text{ch } \tau_1 - \mu)^{1/2}} + \\
&+ \left(\frac{\dot{R}_2 c^2}{\text{sh}^2 \tau_2} - \frac{\dot{R}_1 c^2 \text{ch } \tau_1}{\text{sh}^2 \tau_1} \right) \frac{3}{2} \text{sh } \tau_1 (\text{ch } \tau_1 - \mu)^{1/2}, \\
g_1(\mu) &= -u_2 c^2 \frac{1}{4} \frac{\text{sh } \tau_2 (1 - \mu^2)}{(\text{ch } \tau_2 - \mu)^{3/2}} + \dot{R}_2 c^2 \frac{3}{2} \frac{\text{sh } \tau_2}{(\text{ch } \tau_2 - \mu)^{1/2}} + \\
&+ \left(\frac{\dot{R}_1 c^2}{\text{sh}^2 \tau_1} - \frac{\dot{R}_2 c^2 \text{ch } \tau_2}{\text{sh}^2 \tau_2} \right) \frac{3}{2} \text{sh } \tau_2 (\text{ch } \tau_2 - \mu)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Далее необходимо разложить $f_1(\mu), g_1(\mu)$ по полиномам Гегенбауэра.

Приравнивая коэффициенты правых и левых частей уравнений (3.5.5) и (3.6.6) при некотором полиноме Гегенбауэра $C_n^{-1/2}$, получим систему уравнений 4-го порядка для $(X_1^n)^T = \{a_n, b_n, c_n, d_n\}$

$$M_1^n X_1^n = B_1^n, \tag{3.6.8}$$

матрица M_1^n равна

$$M_1^n = \begin{pmatrix} c_{\tau_1}^- & s_{\tau_1}^- & c_{\tau_1}^+ & s_{\tau_1}^+ \\ c_{\tau_2}^- & -s_{\tau_2}^- & c_{\tau_2}^+ & -s_{\tau_2}^+ \\ n_- s_{\tau_1}^- & n_- c_{\tau_1}^- & n_+ s_{\tau_1}^+ & n_+ c_{\tau_1}^+ \\ -n_- s_{\tau_2}^- & n_- c_{\tau_2}^- & -n_+ s_{\tau_2}^+ & n_+ c_{\tau_2}^+ \end{pmatrix}, \tag{3.6.9}$$

где введены обозначения $n_- = n - 3/2$, $n_+ = n + 1/2$, $c_{\xi}^{\pm} = \text{ch } n_{\pm} \xi$, $s_{\xi}^{\pm} = \text{sh } n_{\pm} \xi$. Столбец B_1^n ввиду его громозкости не приводится. Разрешив систему линейных уравнений (3.6.8), были найдены выражения для $\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$, которые будут далее использованы для определения главной асимптотики вязкой силы, а также для численных расчетов.

3.6.2 Случай свободной границы

В случае свободной границы ($\beta_{1,2} = 0$), тангенциальные напряжения на поверхностях пузырьков равны нулю

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tau} |_{\xi=\tau_1} &= 0, \\
\sigma_{\tau} |_{\xi=-\tau_2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

Для тангенциального напряжения справедлива формула [51]

$$\sigma_\tau/\mu_l = \frac{\operatorname{ch} \xi - \cos \mu}{c} \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial v_\zeta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{c} (v_\zeta \operatorname{sh} \xi + v_\xi \sin \zeta), \quad (3.6.11)$$

где μ_l – вязкость жидкости. Подставляя

$$\begin{aligned} v_\xi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}{c}, \\ v_\zeta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta}{c}, \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_\tau/\mu_l &= \frac{(\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta)^3}{c^3 \sin \zeta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \left(3 \frac{\sin \zeta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta} - \frac{\cos \zeta}{\sin \zeta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 3 \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Учитывая формулы (3.5.1) уравнения (3.6.10) приобретают вид

$$\begin{aligned} &\frac{(\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta)^3}{c^3 \sin \zeta} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{2 \operatorname{ch} \tau_1}{\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta} + \frac{\operatorname{sh}^2 \tau_1}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \cos \zeta)^2} \right) \psi|_{\xi=\tau_1} - \right. \\ &\quad \left. (\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n''(\tau_1) C_n^{-1/2}(\cos \zeta) \right) + \frac{\sin \zeta}{c} (-u_1 \operatorname{ch} \tau_1 - \dot{R}_1) = 0, \\ &\frac{(\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta)^3}{c^3 \sin \zeta} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{2 \operatorname{ch} \tau_2}{\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta} + \frac{\operatorname{sh}^2 \tau_2}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta)^2} \right) \psi|_{\xi=-\tau_2} - \right. \\ &\quad \left. (\operatorname{ch} \tau_2 - \cos \zeta)^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} U_n''(-\tau_2) C_n^{-1/2}(\cos \zeta) \right) + \frac{\sin \zeta}{c} (u_2 \operatorname{ch} \tau_2 + \dot{R}_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Подставляя (3.5.2) в (3.6.14) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} U_n''(\tau_1) C_n^{-1/2}(\mu) &= f_2(\mu), \\ \sum_{n=0}^{\infty} U_n''(-\tau_2) C_n^{-1/2}(\mu) &= g_2(\mu), \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
f_2(\mu) &= -u_1 c^2 \left(\frac{1(1-\mu^2) \operatorname{ch} \tau_1}{4(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{3/2}} - \frac{3(1-\mu^2) \operatorname{sh}^2 \tau_1}{8(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{5/2}} \right) + \\
&+ \dot{R}_1 c^2 \frac{3}{4} \left(\frac{\operatorname{ch} \tau_1}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2}} - 2 \operatorname{coth}^2 \tau_1 (\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2} + \frac{\operatorname{sh}^2 \tau_1}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{3/2}} \right) - \\
&- \dot{R}_1 c^2 \frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{3/2}} + \frac{\dot{R}_2 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_2} \frac{3}{4} \left(2 \operatorname{ch} \tau_1 (\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2} + \frac{\operatorname{sh}^2 \tau_1}{(\operatorname{ch} \tau_1 - \mu)^{1/2}} \right), \\
g_2(\mu) &= u_2 c^2 \left(\frac{1(1-\mu^2) \operatorname{ch} \tau_2}{4(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{3/2}} - \frac{3(1-\mu^2) \operatorname{sh}^2 \tau_2}{8(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{5/2}} \right) - \\
&- \dot{R}_2 c^2 \frac{3}{4} \left(\frac{\operatorname{ch} \tau_2}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2}} - 2 \operatorname{coth}^2 \tau_2 (\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2} + \frac{\operatorname{sh}^2 \tau_2}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{3/2}} \right) + \\
&+ \dot{R}_2 c^2 \frac{1-\mu^2}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{3/2}} - \frac{\dot{R}_1 c^2}{\operatorname{sh}^2 \tau_1} \frac{3}{4} \left(2 \operatorname{ch} \tau_2 (\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2} + \frac{\operatorname{sh}^2 \tau_2}{(\operatorname{ch} \tau_2 - \mu)^{1/2}} \right).
\end{aligned} \tag{3.6.16}$$

Далее необходимо разложить $f_2(\mu), g_2(\mu)$ по полиномам Гегенбауэра.

Приравнивая коэффициенты правых и левых частей уравнений (3.5.5) и (3.6.15) при некотором полиноме Гегенбауэра $C_n^{-1/2}$ получим систему уравнений 4-го порядка для $(X_2^n)^T = \{a_n, b_n, c_n, d_n\}$

$$M_2^n X_2^n = B_2^n, \tag{3.6.17}$$

где матрица M_2^n равна

$$M_2^n = \begin{pmatrix} c_{\tau_1}^- & s_{\tau_1}^- & c_{\tau_1}^+ & s_{\tau_1}^+ \\ c_{\tau_2}^- & -s_{\tau_2}^- & c_{\tau_2}^+ & -s_{\tau_2}^+ \\ n_-^2 c_{\tau_1}^- & n_-^2 s_{\tau_1}^- & n_+^2 c_{\tau_1}^+ & n_+^2 s_{\tau_1}^+ \\ n_-^2 c_{\tau_2}^- & -n_-^2 s_{\tau_2}^- & n_+^2 c_{\tau_2}^+ & -n_+^2 s_{\tau_2}^+ \end{pmatrix}. \tag{3.6.18}$$

Столбец B_2^n , как и B_1^n не приводится ввиду его громозкости. Аналогично случаю прилипания на границе, были найдены выражения для $\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$ из системы линейных уравнений (3.6.17), которые будут далее использованы для определения главной асимптотики вязкой силы, а также для численных расчетов.

3.6.3 Общий случай

В общем случае наличия скольжения на поверхностях пузырьков, уравнения (3.6.1) приобретают вид

$$\begin{aligned}
 & \left(g_1(\mu) - \sum_{n=0}^{\infty} U_n''(\tau_1) C_n^{-1/2}(\mu) \right) (\operatorname{ch} \tau_1 - \mu) = \\
 & = \frac{\beta_1 c}{\mu_l} \left(f_1(\mu) - \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(\tau_1) C_n^{-1/2}(\mu) \right), \\
 & \left(g_2(\mu) - \sum_{n=0}^{\infty} U_n''(-\tau_2) C_n^{-1/2}(\mu) \right) (\operatorname{ch} \tau_2 - \mu) = \\
 & = \frac{\beta_2 c}{\mu_l} \left(f_2(\mu) - \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(-\tau_2) C_n^{-1/2}(\mu) \right),
 \end{aligned} \tag{3.6.19}$$

где β_1 – коэффициент скольжения на первой сфере, β_2 – на второй.

Учитывая рекуррентное соотношение (2.4.3) можно получить

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}''(\tau_1) \frac{n-1}{2n+1} C_n^{-1/2}(\mu) + \frac{\beta_1 c}{\mu_l} \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(\tau_1) C_n^{-1/2}(\mu) + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(U_{n-1}''(\tau_1) \frac{n}{2n-3} - U_n''(\tau_1) \operatorname{ch} \tau_1 \right) C_n^{-1/2}(\mu) = \\
 & = \frac{\beta_1 c}{\mu_l} f_1(\mu) - g_1(\mu) (\operatorname{ch} \tau_1 - \mu), \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}''(-\tau_2) \frac{n-1}{2n+1} C_n^{-1/2}(\mu) + \frac{\beta_2 c}{\mu_l} \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(-\tau_2) C_n^{-1/2}(\mu) + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \left(U_{n-1}''(-\tau_2) \frac{n}{2n-3} - U_n''(-\tau_2) \operatorname{ch} \tau_2 \right) C_n^{-1/2}(\mu) = \\
 & = \frac{\beta_2 c}{\mu_l} f_2(\mu) - g_2(\mu) (\operatorname{ch} \tau_2 - \mu).
 \end{aligned} \tag{3.6.20}$$

Раскладывая правые части (3.6.20) по полиномам Гегенбауэра и вместе с (3.5.5) получим рекуррентную систему 4-го порядка для a_n, b_n, c_n, d_n . Данную систему разрешить в общем виде не удастся, ни в случае сфер постоянных радиусов [36, 42, 43, 76], ни тем более в случае сфер переменных радиусов. Как отмечается в ранних работах [42, 43, 76], следует выбрать достаточно большое число N , такое, что коэффициентами $a_{N+1}, b_{N+1}, c_{N+1}, d_{N+1}$ можно пренебречь. Тогда полученную рекурсию можно разрешить численно.

3.7 Асимптотический вид вязких сил

В работе [40] при рассмотрении движения твердой сферы перпендикулярно плоскости вблизи контакта вязкая сила в виде бесконечной суммы вида (3.4.7) разбивалась уже упомянутом образом (2.10.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n, \epsilon) = \sum_{n=1}^N f(n, \epsilon) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n, \epsilon), \quad (3.7.1)$$

причем N выбирается как $N = C\epsilon^{-(1-q)}$, где $C > 0$ и $0 < q < 1$ постоянные не зависящие от ϵ . Рассмотренный в работе [40] случай соответствует предельному случаю, когда одна из сфер имеет бесконечный радиус. В этом предельном случае в [40] удалость найти асимптотическое разложение вязкой силы вблизи контакта с точностью до константы. В нашем же случае произвольных переменных радиусов применить такой подход и найти вязкую силу с точностью до константы не удастся.

Другой подход для нахождения асимптотики с точностью до константы бесконечных сумм был предложен Петровым А.Г. в работе [26]. Он заключается в том чтобы в формуле (3.7.1) взять $N = 1/\epsilon$. Тогда для второй суммы в (3.7.1) получается, что

$$\sum_{n=1/\epsilon}^{\infty} f(n, \epsilon) = O(1). \quad (3.7.2)$$

Таким образом, с точностью до константы асимптотическое разложение вязкой силы можно найти по формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n, \epsilon) = \sum_{n=1}^{1/\epsilon} f(n, \epsilon) + O(1). \quad (3.7.3)$$

3.7.1 Случай прилипания

Для случая прилипания на границе пузырьков следует подставить в (3.4.10) коэффициенты $\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$ найденные по формуле (3.6.8) и ограничить суммирование в соответствии с формулой (3.7.3). После некоторых преобразований были найдены разложения вязких сил вблизи контакта с точностью до константы

$$F_{\mu_1} \approx -F_{\mu_2} = -6\pi\mu_l \bar{R}^2 \frac{\dot{h}}{h} - 6\pi\mu_l \bar{R} \ln \left(\frac{\bar{R}}{h} \right) \left(\frac{1}{5} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right) \dot{h} - \quad (3.7.4)$$

$$- 6\pi\mu_l \bar{R} \ln \left(\frac{\bar{R}}{h} \right) \left(\frac{R_2(R_2 + 2R_1)}{(R_1 + R_2)^2} \dot{R}_1 + \frac{R_1(R_1 + 2R_2)}{(R_1 + R_2)^2} \dot{R}_2 \right) + O(1),$$

где $\dot{h} = -(\dot{R}_1 + \dot{R}_2 + u_1 + u_2)$, $\bar{R} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

Для вязких сил действующих на пузырьки со стороны жидкости нельзя пользоваться "третьим законом Ньютона" и равенство $F_{\mu_1} + F_{\mu_2} = 0$, вообще говоря, не выполняется. Однако приближенно, с точностью до $O(1)$, как видно из асимптотик имеем $F_{\mu_1} + F_{\mu_2} \approx 0$.

Для постоянных радиусов ($\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = 0$) разложения вязких сил совпадают с ранее полученными результатами работ [38, 58]

$$F_{\mu_1} \approx -F_{\mu_2} = 6\pi\mu_l \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{u_1 + u_2}{h} + \quad (3.7.5)$$

$$+ 6\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{5} + \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \right) (u_1 + u_2) \ln \frac{R_1}{h} + O(1).$$

Для пузырьков переменных радиусов в формуле (3.7.4) главная асимптотика пропорциональна $1/h$, ранее это было получено в работах [26, 27] с помощью теории смзочного слоя. В работе [68], также с помощью теории смазочного слоя, при рассмотрении роста пузырька около стенки была частично получена и логарифмическая особенность асимптотики

$$F_{\mu_l} = -6\pi\mu_l R_1 \dot{h} \left(\frac{1}{h/R_1} + O(\ln h/R_1) \right) + 6\pi\mu_l R_1 \dot{R}_1 (\ln h/R_1 + O(1)). \quad (3.7.6)$$

При устремлении же $R_2 \rightarrow \infty$ в формуле (3.7.4) получим боле точное разложение, включающее логарифмическую особенность при \dot{h}

$$F_{\mu_l} = -6\pi\mu_l R_1 \dot{h} \left(\frac{1}{h/R_1} - \frac{1}{5} \ln h/R_1 + O(1) \right) + 6\pi\mu_l R_1 \dot{R}_1 (\ln h/R_1 + O(1)). \quad (3.7.7)$$

При больших расстояниях между сферами асимптотики вязких сил при-

нимают вид

$$\begin{aligned}\frac{F_{\mu 1}}{6\pi\mu_l R_1} &\approx u_1 \left(1 + \frac{9 R_1 R_2}{4 r^2}\right) + \frac{3}{2} u_2 \frac{R_2}{r} + \frac{3}{2} \dot{R}_1 \frac{R_1^2 R_2}{r^3} + \dot{R}_2 \frac{R_2^2}{r^2}, \\ \frac{F_{\mu 2}}{-6\pi\mu_l R_2} &\approx u_2 \left(1 + \frac{9 R_1 R_2}{4 r^2}\right) + \frac{3}{2} u_1 \frac{R_1}{r} + \frac{3}{2} \dot{R}_2 \frac{R_2^2 R_1}{r^3} + \dot{R}_1 \frac{R_1^2}{r^2},\end{aligned}\quad (3.7.8)$$

что согласуется при $\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = 0$ с [52].

3.7.2 Случай свободной границы

Для случая свободной границы, аналогично предыдущему случаю, следует подставить в (3.4.10) коэффициенты $\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$ найденные по формуле (3.6.17) и ограничивать суммирование в соответствии с формулой (3.7.3). После некоторых преобразований были найдены разложения вязких сил вблизи контакта с точностью до константы

$$F_{\mu 1} \approx -F_{\mu 2} = 2\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\dot{R}_1 + \dot{R}_2 + u_1 + u_2\right) \ln \frac{R_1}{h} + O(1). \quad (3.7.9)$$

Как и в предыдущем случае, с точностью до $O(1)$ получаем, что $F_{\mu 1} + F_{\mu 2} \approx 0$.

Для постоянных радиусов ($\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = 0$) разложения вязких сил совпадают с ранее полученными результатами работы [14]

$$F_{\mu 1} \approx -F_{\mu 2} = 2\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (u_1 + u_2) \ln \frac{R_1}{h} + O(1). \quad (3.7.10)$$

При больших расстояниях между сферами асимптотики вязких сил принимают вид

$$\begin{aligned}F_{\mu 1}/(4\pi\mu_l) &\approx R_1 u_1 \left(1 + \frac{R_1 R_2}{r^2}\right) + R_1 u_2 \frac{R_2}{r} + R_2 \dot{R}_1 \frac{R_1^3}{r^3} + R_1 \dot{R}_2 \frac{R_2^2}{r^2}, \\ F_{\mu 2}/(4\pi\mu_l) &\approx -R_2 u_2 \left(1 + \frac{R_1 R_2}{r^2}\right) - R_2 u_1 \frac{R_1}{r} - R_1 \dot{R}_2 \frac{R_2^3}{r^3} - R_2 \dot{R}_1 \frac{R_1^2}{r^2}.\end{aligned}\quad (3.7.11)$$

3.7.3 Общий случай

В случае граничного условия проскальзывания не удастся найти асимптотические разложения вязких сил аналогично двум предыдущим случаям, ввиду того, что рекуррентную систему уравнений (3.6.20, 3.5.5) в явном виде не удастся разрешить. Поэтому воспользуемся методом тонкого слоя [26, 27, 67, 68].

В приближении тонкого слоя уравнения Стокса в безразмерном виде и уравнение непрерывности в цилиндрических координатах приобретают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial \rho} &= \frac{\partial^2 v_\rho}{\partial z^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho v_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{3.7.12}$$

граничные условия проскальзывания на поверхности первого пузырька

$$-\lambda_1 \frac{\partial v_\rho}{\partial z} = v_\rho - \dot{R}_1 \frac{\partial z_1}{\partial \rho},\tag{3.7.13}$$

на поверхности второго пузырька

$$\lambda_2 \frac{\partial v_\rho}{\partial z} = v_\rho + \dot{R}_2 \frac{\partial z_2}{\partial \rho},\tag{3.7.14}$$

граничное условие на нормальную составляющую (условие непротекания через границу) для первого пузырька

$$v_z - \frac{\partial z_1}{\partial t} = v_\rho \frac{\partial z_1}{\partial \rho},\tag{3.7.15}$$

для второго пузырька

$$v_z - \frac{\partial z_2}{\partial t} = v_\rho \frac{\partial z_2}{\partial \rho}.\tag{3.7.16}$$

Решение системы уравнений имеет вид

$$v_\rho = \frac{z^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \rho} + C_1(\rho)z + C_0(\rho),\tag{3.7.17}$$

$$v_z = -\frac{z^3}{6} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) - \frac{z^2}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho C_1(\rho)) - z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho C_0(\rho)) + C^*(\rho).\tag{3.7.18}$$

Функции $C_1(\rho)$ и $C_0(\rho)$ находятся из граничных условий проскальзывания (3.7.13),(3.7.14). Из разницы уравнений (3.7.15) и (3.7.16) исключается $C^*(\rho)$ и получается уравнение на $\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}$.

Рассмотрим по отдельности вклад в вязкую силу от \dot{h} и \dot{R}_i . Положим сперва $\dot{h} \neq 0$ и $\dot{R}_i = 0$. После интегрирования уравнения на $\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}$ имеем

$$\frac{\partial p}{\partial H} = 6 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{H + \lambda_1 + \lambda_2}{H^2 (H^2 + 4(\lambda_1 + \lambda_2)H + 12\lambda_1 \lambda_2)} \dot{h},\tag{3.7.19}$$

где

$$H(\rho) = z_1(\rho) - z_2(\rho) \approx h + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.7.20)$$

Для нахождения давления p целесообразно перейти от переменной H к $X = 1/H$. Тогда получим

$$p = p_\infty - \frac{6 R_1 R_2}{4 R_1 + R_2} \dot{h} I, \quad (3.7.21)$$

$$I = \int_0^{1/H} \frac{X^2(X_1 + X_2) + 4X X_1 X_2}{(X + X_1)(X + X_2)} dX,$$

где

$$X_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}}{6 \lambda_1 \lambda_2}, \quad (3.7.22)$$

$$X_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}}{6 \lambda_1 \lambda_2}.$$

После интегрирования (3.7.21), получим

$$I = (X_1 + X_2)X + X_1^2 \frac{3X_2 - X_1}{X_1 - X_2} \ln \left(1 + \frac{X}{X_1} \right) + X_2^2 \frac{3X_1 - X_2}{X_2 - X_1} \ln \left(1 + \frac{X}{X_2} \right). \quad (3.7.23)$$

Вязкая сила, действующая на первую сферу со стороны жидкости, дается интегралом

$$F_{\mu 1} = \int_0^R (p - p_\infty) 2\pi \rho d\rho = \int_h^{H(R)} (p - p_\infty) 2\pi \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} dH, \quad (3.7.24)$$

где $H(R) \sim R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \gg h$.

Применив еще раз переход от H к $X = 1/H$, получим

$$F_{\mu 1} \approx -F_{\mu 2} = -3\pi \mu_l \dot{h} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 I_2 + O(1), \quad (3.7.25)$$

$$I_2 = \varphi(x, X_1, X_2) + \varphi(x, X_2, X_1),$$

$$\varphi(x, X_1, X_2) = -X_1 + X_1 \frac{X_1 - 3X_2}{X_1 - X_2} \left(1 + \frac{X_1}{x} \right) \ln \left(1 + \frac{x}{X_1} \right),$$

где $x = 1/h$.

Вязкая сила для двух сфер постоянных радиусов, найденная по формуле (3.7.25) полностью совпадает с соответствующей формулой из работы [15]. При устремлении $\lambda_1 \rightarrow 0$, $\lambda_2 \rightarrow 0$ получаем согласование с (3.7.4).

Рассмотрим случай $\dot{h} = 0$, $\dot{R}_1 \neq 0$ и $\dot{R}_2 = 0$. Аналогично вышеизложенному, получим, что вклад в вязкую силу от \dot{R}_1 равен

$$F_{\mu 1} \approx -F_{\mu 2} = -2\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \dot{R}_1 \left(\frac{3R_2(2R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2} \ln \left(\frac{R_1 R_2}{h(R_1 + R_2)} \right) + \Phi(x, X_1, X_2) + \Phi(x, X_2, X_1) \right) + O(1), \quad (3.7.26)$$

где

$$\Phi(x, X_1, X_2) = \frac{R_2}{2(R_1 + R_2)} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(X_1 - X_2)\lambda_1\lambda_2} \left(1 + \frac{X_1}{x} \right) \ln \left(1 + \frac{x}{X_1} \right) + \frac{3R_2(2R_1 + R_2 - R_2 X_1/x)(3X_2 - X_1)}{4(R_1 + R_2)^2(X_1 - X_2)} \left(\left(1 + \frac{X_1}{x} \right) \ln \left(1 + \frac{x}{X_1} \right) - 1 \right). \quad (3.7.27)$$

Случай $\dot{h} = 0$, $\dot{R}_1 = 0$ и $\dot{R}_2 \neq 0$ получается из предыдущего перестановкой индексов 1 на 2.

При устремлении $\lambda_2 \rightarrow 0$ и $R_2 \rightarrow \infty$ в (3.7.26) получаем полное совпадение с [68].

В случай прилипания при $\dot{h} = 0$ в пределе $\lambda_1 \rightarrow 0$, $\lambda_2 \rightarrow 0$ получаем

$$F_{\mu 1} = -6\pi\mu_l \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \ln \left(\frac{R_1}{h} \right) \frac{R_2(2R_1 + R_2)\dot{R}_1 + R_1(2R_2 + R_1)\dot{R}_2}{(R_1 + R_2)^2} + O(1), \quad (3.7.28)$$

что согласуется с (3.7.4).

3.8 Выводы

В приближении Стокса было рассмотрено движение двух сфер переменных радиусов в вязкой жидкости. Для случая прилипания и для случая нулевого тангенциального напряжения на границе сфер были найдены в явном виде функции тока в разложении по полиномам Гегенбауэра. С помощью этих функций тока были найдены вязкие силы, действующие на сферы для любых расстояний между ними. Вблизи контакта были найдены их расходящиеся асимптотики.

В общем случае проскальзывания на границе сфер для коэффициентов функции тока в разложении по полиномам Гегенбауэра получено рекуррент-

ное соотношение, которое следует решать численно. Вблизи контакта с помощью теории тонкого слоя была найдена асимптотика вязкой силы. При предельных переходах к случаям прилипания выражения согласуются с ранее полученными результатами, как данной работы, так и других авторов.

3.9 Приложение: Разложение по полиномам Гегенбауэра

Для разложения $f_0(\mu)$, $g_0(\mu)$, $f_1(\mu)$, $g_1(\mu)$, $f_2(\mu)$, $g_2(\mu)$ по полиномам Гегенбауэра в формулах (3.5.6), (3.6.7), (3.6.16) необходимо использовать следующие тождества.

Из ранее приведенных формул (2.14.2), (2.14.3) при $\tau > 0$ и $-1 \leq \mu \leq 1$

$$(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-(n-1/2)\tau}, \quad (3.9.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2}} &= \frac{2}{\operatorname{sh} \tau} \frac{d(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2}}{d\tau} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{-(n-1/2)\sqrt{2}}{\operatorname{sh} \tau} e^{-(n-1/2)\tau}, \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh}^2 \tau}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{3/2}} &= 4 \left(-\frac{d^2(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2}}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} \tau}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2}} \right) = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) e^{-(n-1/2)\tau} \frac{4}{\sqrt{2}} \left((n-1/2)^2 + (n-1/2) \operatorname{coth} \tau \right), \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

а также, что

$$\begin{aligned} (\operatorname{ch} \tau - \mu)^{3/2} &= \int \frac{3}{2} (\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2} \operatorname{sh} \tau d\tau = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{3\sqrt{2}}{8} \left(\frac{e^{-(n+1/2)\tau}}{n+1/2} - \frac{e^{-(n-3/2)\tau}}{n-3/2} \right). \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

Учитывая ранее полученную формулу (2.14.11)

$$\frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) 2\sqrt{2}n(n-1)e^{-(n-1/2)\tau}, \quad (3.9.5)$$

легко получить

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{5/2}} &= -\frac{1}{\operatorname{sh} \tau} \frac{d}{d\tau} \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{3/2}} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) 2\sqrt{2}n(n-1) \frac{(n-1/2)}{\operatorname{sh} \tau} e^{-(n-1/2)\tau},
 \end{aligned} \tag{3.9.6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{1/2}} &= -\int \frac{1}{2} \frac{1 - \mu^2}{(\operatorname{ch} \tau - \mu)^{3/2}} \operatorname{sh} \tau d\tau = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{-1/2}(\mu) \frac{\sqrt{2}}{2} n(n-1) \left(\frac{e^{-(n-3/2)\tau}}{n-3/2} - \frac{e^{-(n+1/2)\tau}}{n+1/2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.9.7}$$

Глава 4

Условия слияния

Из асимптотических уравнений (3.7.4), (3.7.9), (3.7.25), (3.7.26) замечаем, что главные асимптотики равны и противоположны по знаку. Поэтому приближенно выполняется закон сохранения импульса системы двух пузырьков. Благодаря этому уравнения Лагранжа для двух степеней свободы (1.3.5), (1.3.6) можно свести к уравнению Рауса для одной степени свободы.

4.1 Преобразование Рауса

Удобно ввести новые переменные

$$r = z_1 - z_2, \quad z_{sum} = z_1 + z_2. \quad (4.1.1)$$

Старые переменные выражаются через новые следующим образом

$$z_1 = \frac{z_{sum} + r}{2}, \quad z_2 = \frac{z_{sum} - r}{2}, \quad u_1 = -\frac{\dot{z}_{sum} + \dot{r}}{2}, \quad u_2 = \frac{\dot{z}_{sum} - \dot{r}}{2}. \quad (4.1.2)$$

Тогда уравнения Лагранжа (1.3.5), (1.3.6) с учетом $F_{\mu 1} + F_{\mu 2} \approx 0$ имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T}{\partial r} + F_{\mu}, \quad (4.1.3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{sum}} = 0, \quad (4.1.4)$$

где $T = T(r, \dot{r}, \dot{z}_{sum}, t)$, $F_{\mu} = F_{\mu 1}$. Таким образом, по своему виду переменная z_{sum} является циклической координатой, которая исключается методом Рауса.

Проинтегрировав уравнение (4.1.4) по времени, получим полный импульс системы

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{sum}} = I = const. \quad (4.1.5)$$

В новых переменных выражение для кинетической энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{T}{2\pi\rho} = & A_1 \left(\frac{\dot{z}_{sum} + \dot{r}}{2} \right)^2 - 2B \frac{\dot{z}_{sum} + \dot{r}}{2} \frac{\dot{z}_{sum} - \dot{r}}{2} + A_2 \left(\frac{\dot{z}_{sum} - \dot{r}}{2} \right)^2 - \\ & - \left(C_{11}\dot{R}_1 + C_{12}\dot{R}_2 \right) \frac{\dot{z}_{sum} + \dot{r}}{2} + \left(C_{21}\dot{R}_1 + C_{22}\dot{R}_2 \right) \frac{\dot{z}_{sum} - \dot{r}}{2} + \\ & + D_1\dot{R}_1^2 + 2E\dot{R}_1\dot{R}_2 + D_2\dot{R}_2^2. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Перейдем к координатам Рауса $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (x, y, \dot{x}, I)$, где

$$\begin{aligned} I = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{sum}} = & \pi\rho_l \left(-2B\dot{z}_{sum} + A_1(\dot{z}_{sum} + \dot{r}) + A_2(\dot{z}_{sum} - \dot{r}) - \right. \\ & \left. - (C_{11}\dot{R}_1 + C_{12}\dot{R}_2) + (C_{21}\dot{R}_1 + C_{22}\dot{R}_2) \right). \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Выразим \dot{z}_{sum} через I

$$\dot{z}_{sum} = \frac{I/\pi\rho_l + (A_2 - A_1)\dot{r} + (C_{11}\dot{R}_1 + C_{12}\dot{R}_2) - (C_{21}\dot{R}_1 + C_{22}\dot{R}_2)}{A_1 + A_2 - 2B}. \quad (4.1.8)$$

Найдем функцию Рауса T_R в случае установившегося периодического движения в предположении, что суммарный импульс системы I будет равен нулю

$$\begin{aligned} T_R = \frac{T - I\dot{z}_{sum}}{2\pi\rho_l} \Big|_{\dot{z}_{sum} = \dot{z}_{sum}(I, r, \dot{r})} = & \dot{r}^2 \frac{A_1 A_2 - B^2}{A_1 + A_2 - 2B} - \\ & - \dot{r} \frac{(A_2 - B)(C_{11}\dot{R}_1 + C_{12}\dot{R}_2) + (A_1 - B)(C_{21}\dot{R}_1 + C_{22}\dot{R}_2)}{A_1 + A_2 - 2B} + \\ & + D_1\dot{R}_1^2 + 2E\dot{R}_1\dot{R}_2 + D_2\dot{R}_2^2 - \frac{(C_{11}\dot{R}_1 + C_{12}\dot{R}_2 - C_{21}\dot{R}_1 - C_{22}\dot{R}_2)^2}{4(A_1 + A_2 - 2B)}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

тогда уравнение Рауса принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_R}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T_R}{\partial r} + \frac{F_{\mu_l}}{2\pi\rho_l}. \quad (4.1.10)$$

Функция Рауса T_R для твердых шаров движущихся в идеальной жидкости была получена Хиксом [54] и она равна первому слагаемому (4.1.9).

Учитывая, что $R_i = R_{i0}(1 + \varepsilon(t))$ введем параметр $k = R_2/R_1 = R_{20}/R_{10} \geq 1$ (для определенности считаем $R_{20} \geq R_{10}$) и перейдем от r к δ

$$r = R_1 + R_2 + h = R_1 + R_2 + R_1\delta = R_{10}(1 + \varepsilon)(1 + k + \delta) \quad (4.1.11)$$

$$\dot{r} = R_{10}(\dot{\varepsilon}(1 + k + \delta) + (1 + \varepsilon)\dot{\delta}). \quad (4.1.12)$$

В силу свойства ковариантности уравнений Лагранжа [16,22] уравнение Рауса (4.1.10) приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_R}{\partial \dot{\delta}} = \frac{\partial T_R}{\partial \delta} + \frac{F_{\mu}}{2\pi\rho_l} \frac{\partial r}{\partial \delta}, \quad (4.1.13)$$

где

$$T_R = \frac{R_{10}^5 (1 + \varepsilon)^3}{2} (\mu_{11} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\delta}^2 + 2\mu_{12} (1 + \varepsilon) \dot{\varepsilon} \dot{\delta} + \mu_{22} \dot{\varepsilon}^2) \quad (4.1.14)$$

и безразмерные функции $\mu_{11}(k, \delta)$, $\mu_{12}(k, \delta)$, $\mu_{22}(k, \delta)$ находятся по формулам

$$\mu_{11}(k, \delta) = \frac{2}{R_1^3} \frac{A_1 A_2 - B^2}{A_1 + A_2 - 2B}, \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned} \mu_{12}(k, \delta) = & - \frac{1}{R_1^3} \frac{(A_2 - B)(C_{11} + C_{12}k) + (A_1 - B)(C_{21} + C_{22}k)}{A_1 + A_2 - 2B} + \\ & + \frac{2}{R_1^3} \frac{A_1 A_2 - B^2}{A_1 + A_2 - 2B} (1 + k + \delta) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned} \mu_{22}(k, \delta) = & \frac{2}{R_1^3} \left(D_1 + 2Ek + D_2 k^2 - \frac{(C_{11} + C_{12}k - C_{21} - C_{22}k)^2}{4(A_1 + A_2 - 2B)} \right) - \\ & - \frac{2}{R_1^3} \frac{(A_2 - B)(C_{11} + C_{12}k) + (A_1 - B)(C_{21} + C_{22}k)}{A_1 + A_2 - 2B} (1 + k + \delta) + \\ & + \frac{2}{R_1^3} \frac{A_1 A_2 - B^2}{A_1 + A_2 - 2B} (1 + k + \delta)^2. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Далее будем обозначать точкой производную по безразмерному времени $t' = \omega t$. Подставляя (4.1.14) в уравнение (4.1.13) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \left(\mu_{11} (1 + \varepsilon)^5 \dot{\delta} + \mu_{12} (1 + \varepsilon)^4 \dot{\varepsilon} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(d_{11} (1 + \varepsilon)^5 \dot{\delta}^2 + 2d_{12} (1 + \varepsilon)^4 \dot{\delta} \dot{\varepsilon} + d_{22} (1 + \varepsilon)^3 \dot{\varepsilon}^2 \right) + \frac{F_{\mu} (1 + \varepsilon)}{2\pi\rho\omega^2 R_{10}^4}, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

где $d_{ij} = \partial \mu_{ij} / \partial \delta$.

4.2 Случай прилипания

4.2.1 Решение методом осреднения

Упростим формулу (4.1.18) в предположении $\varepsilon \ll 1$. При этом следует сохранить в правой части второй порядок малости по $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\delta}$

$$\frac{d}{dt'} (\mu_{11}\dot{\delta} + \mu_{12}\dot{\varepsilon}) = f_B + f_{\mu}, \quad (4.2.1)$$

где

$$f_B = \frac{1}{2}(d_{22}\dot{\varepsilon}^2 + 2d_{12}\dot{\varepsilon}\dot{\delta} + d_{11}\dot{\delta}^2), \quad (4.2.2)$$

$$f_{\mu} = \frac{F_{\mu}(1 + \varepsilon)}{2\pi\rho\omega^2 R_{01}^4}. \quad (4.2.3)$$

В случае отсутствия слияния пузырьков, устанавливается периодическая пульсация пузырьком с фиксированным средним зазором δ_0 между поверхностями сфер. Для аналитического описания такого режима применяется метод осреднения, который был использован в работе [26] для двух пузырьков равного радиуса. В отличие от [26] коэффициенты μ_{ij} , d_{ij} , f_{μ} будут зависеть не только от относительного расстояния δ , но также от отношения радиусов сфер $k = R_2/R_1$.

Для вязкой силы будем использовать асимптотический вид (3.7.4)

$$\begin{aligned} F_{\mu} = & -6\pi\mu_l\bar{R}^2\frac{\dot{h}}{h} - 6\pi\mu_l\bar{R}\ln\left(\frac{\bar{R}}{h}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2}\right)\dot{h} - \\ & - 6\pi\mu_l\bar{R}\ln\left(\frac{\bar{R}}{h}\right)\left(\frac{R_2(R_2 + 2R_1)}{(R_1 + R_2)^2}\dot{R}_1 + \frac{R_1(R_1 + 2R_2)}{(R_1 + R_2)^2}\dot{R}_2\right) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Учитывая, (1.3.4) а также, что $R_2 = kR_1$ получим,

$$\begin{aligned} \frac{f_{\mu}}{M} = & -3\frac{(1 + \varepsilon)^3k^2}{(1 + k)^2}\frac{\dot{\delta}}{\delta} + 3\dot{\delta}\frac{(1 + \varepsilon)^3k(1 + 7k + k^2)}{5(1 + k)^3}\ln\delta\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ & + 9\dot{\varepsilon}\frac{(1 + \varepsilon)^2k^2}{(1 + k)^2}\ln\delta\left(1 + \frac{1}{k}\right), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

где $M = \mu_l/\rho\omega R_{10}^2$, а производная берется по безразмерному параметру времени $t' = \omega t$. Будем искать стационарное решение в виде $\delta(t') = \delta_0 + x(t')$, при этом $\dot{\delta}(t') = \dot{x}(t')$. Перенесем линейные члены по x и ε в левую часть равенства, а квадратичные в правую, причем полные дифференциалы по квадратичным членам опускаются. Уравнение (4.2.1) приобретает вид

$$\frac{d}{dt'} (\mu_{11}\dot{x} + \eta_{11}x + \mu_{12}\dot{\varepsilon} + \eta_{12}\varepsilon) = f_B + f_{\mu}^{(2)}, \quad (4.2.6)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\frac{\eta_{11}}{M} &= \frac{3k^2}{(1+k^2)\delta_0} - \frac{3k(1+7k+k^2)}{5(1+k)^3} \ln \delta_0(1+1/k), \\ \frac{\eta_{12}}{M} &= -\frac{9k^2}{(1+k)^2} \ln \delta_0(1+1/k), \\ \frac{f_{\mu}^{(2)}}{M} &= (x\dot{\varepsilon} - \dot{x}\varepsilon) \frac{9k^2}{(1+k)^2\delta_0} + \dot{x}\varepsilon \frac{9k(1+7k+k^2)}{5(1+k)^3} \ln \delta_0(1+1/k).\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

Решение в линейном приближении имеет вид

$$x = -\varepsilon_0 \left(\frac{\eta_{11}\eta_{12} + \mu_{11}\mu_{12}}{\eta_{11}^2 + \mu_{11}^2} \cos(t') + \frac{\eta_{12}\mu_{12} - \eta_{11}\mu_{11}}{\eta_{11}^2 + \mu_{11}^2} \sin(t') \right). \quad (4.2.8)$$

Осредняя правую часть уравнения (4.2.6) по периоду, получим суммарную среднюю силу

$$\bar{f}(M, k, \delta_0) = \bar{f}_B + \bar{f}_{\mu}^{(2)}. \quad (4.2.9)$$

Для ее определения понадобятся следующие выражения

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{\varepsilon_0^2 \eta_{12}^2 + \mu_{12}^2}{2 \eta_{11}^2 + \mu_{11}^2}, \quad (4.2.10)$$

$$\overline{x\dot{\varepsilon}} = -\overline{\dot{x}\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0^2 \eta_{12}\mu_{12} - \eta_{11}\mu_{11}}{2 \eta_{11}^2 + \mu_{11}^2}, \quad (4.2.11)$$

$$\overline{\dot{\varepsilon}^2} = \frac{\varepsilon_0^2}{2}. \quad (4.2.12)$$

$$\overline{\dot{x}\dot{\varepsilon}} = -\frac{\varepsilon_0^2 \eta_{11}\eta_{12} + \mu_{11}\mu_{12}}{2 \eta_{11}^2 + \mu_{11}^2} \quad (4.2.13)$$

В недавних экспериментальных работах [60–62] изучалось парное слияние газовых пузырьков, движущихся в воде. Пузырьки имели радиусы $R \sim 10 - 30$ мкм, частота акустического воздействия и амплитуда осцилляции давления соответственно равны $\omega = 2\pi \cdot 22,4$ кГц, $\Delta p \sim 10 - 20$ кПа. В этом случае параметр $M = \mu_l / (\rho_l \omega R_{10}^2) \sim 0,007 - 0,07$, а относительная амплитуда осцилляции радиусов $\varepsilon_0 = \Delta p / (3\gamma p_\infty) \sim 0,02 - 0,05$.

На рисунках 4.1-4.8 изображены зависимости осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от зазора между пузырьками δ_0 для отношений радиусов $R_2/R_1 = 1 - 5$ и параметра $M = 0 - 0,07$.

Из рисунков 4.1-4.4 видно, что средняя сила отрицательна для отношений радиусов пузырьков 1 – 2,8 при всех значениях M . В этом случае происходит слияние пузырьков.

Как видно из рисунков 4.5-4.8 для отношения радиусов 2,9 сила притяжения может изменить знак. В этом случае, начиная с некоторого значения $M > 0,01$, пузырьки пульсируют на некотором конечном зазоре δ_0 , зависящем от параметра M . Для отношений радиусов больше 3 осредненная сила меняет свой знак. Это соответствует тому, что пузырьки будут пульсировать около некоторого среднего расстояния δ_0 , зависящем от параметра M . Это расстояние увеличивается с ростом M .

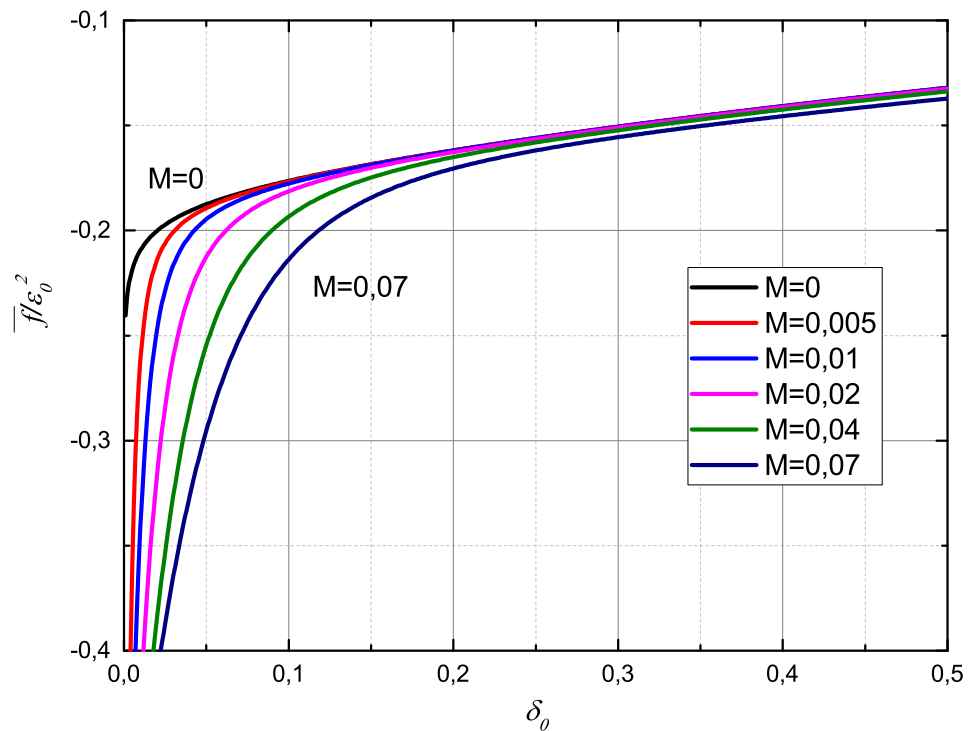


Рис. 4.1: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 1$ при разных параметрах M

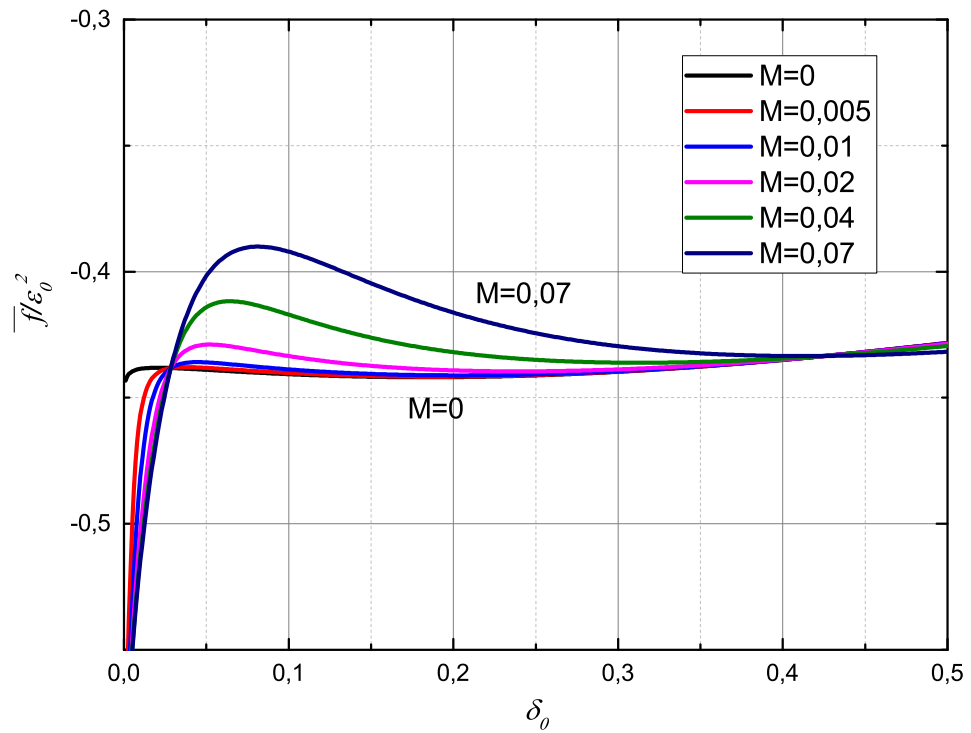


Рис. 4.2: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 2$ при разных параметрах M

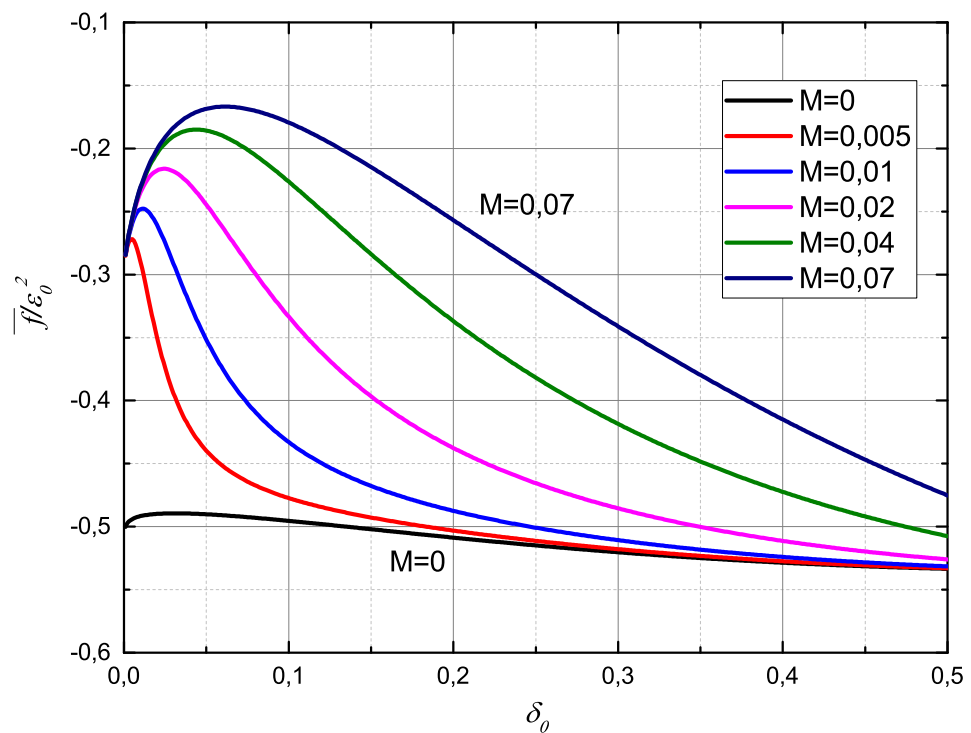


Рис. 4.3: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 2,5$ при разных параметрах M

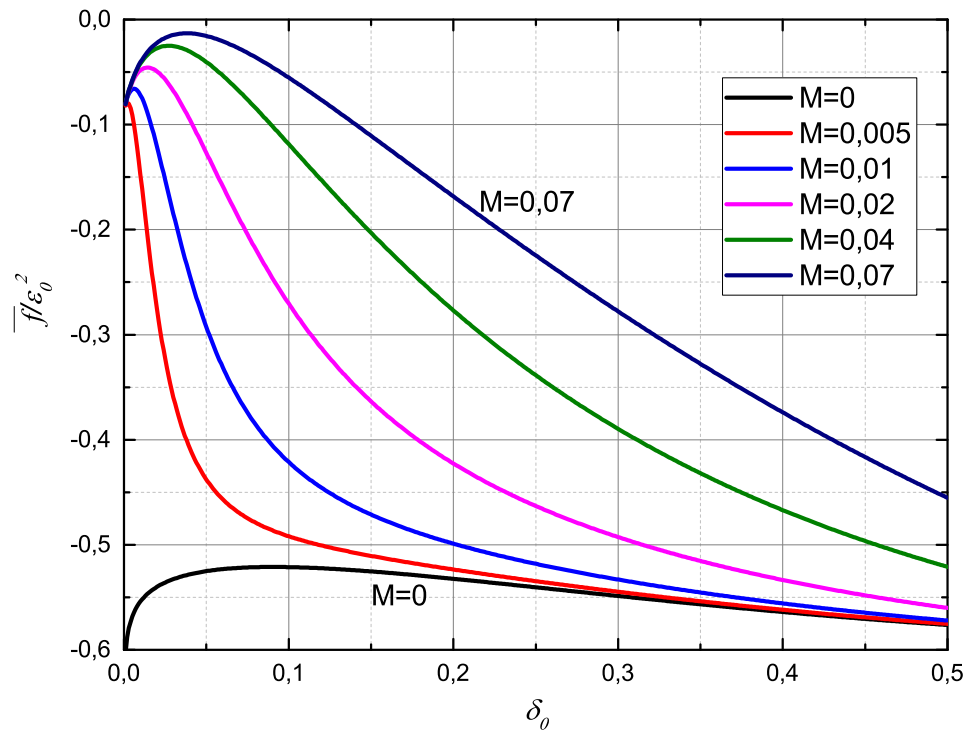


Рис. 4.4: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 2,8$ при разных параметрах M

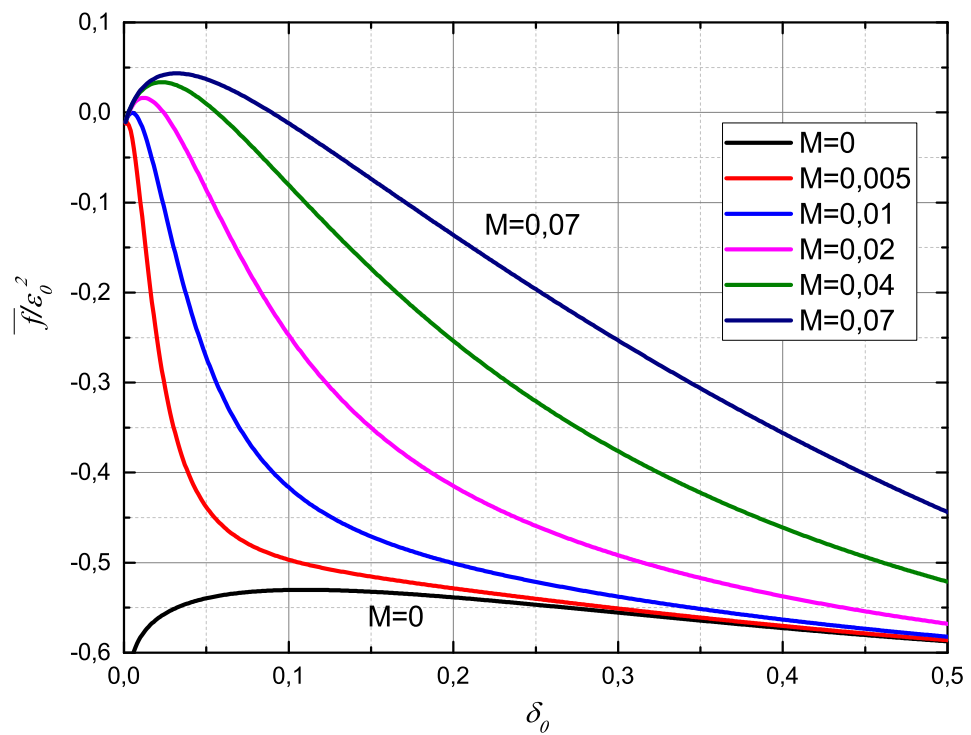


Рис. 4.5: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 2,9$ при разных параметрах M

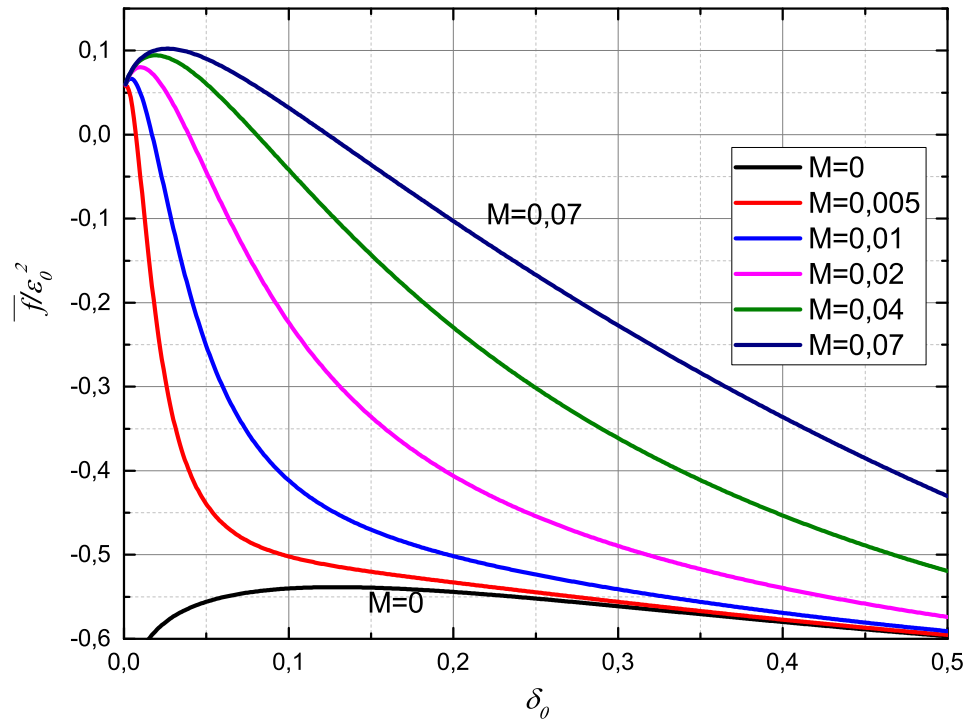


Рис. 4.6: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 3$ при разных параметрах M

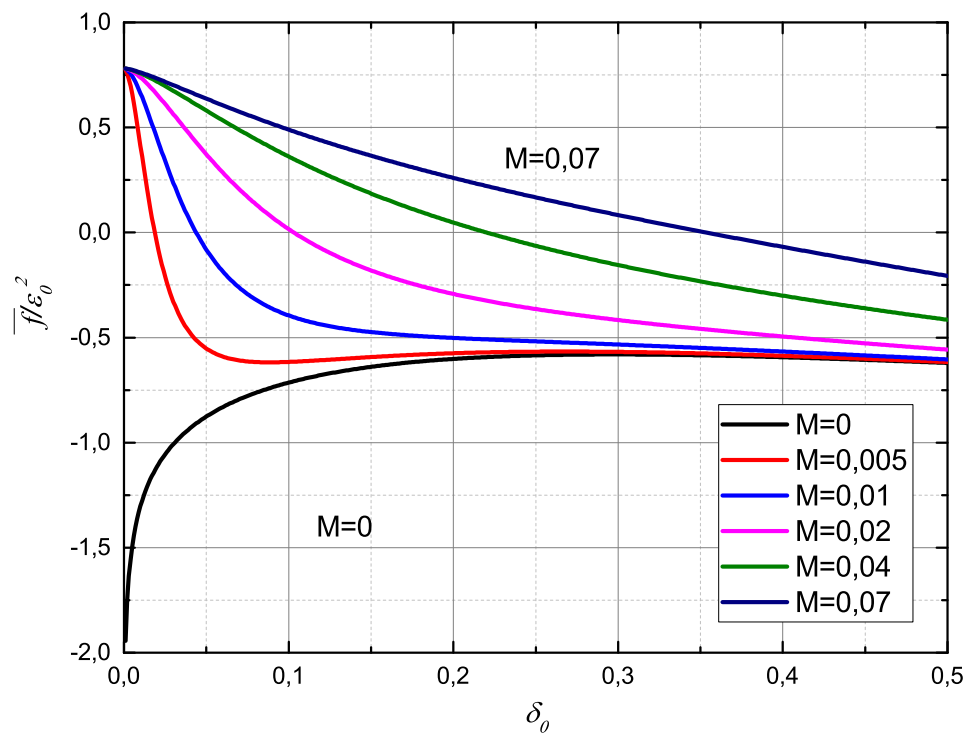


Рис. 4.7: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 4$ при разных параметрах M

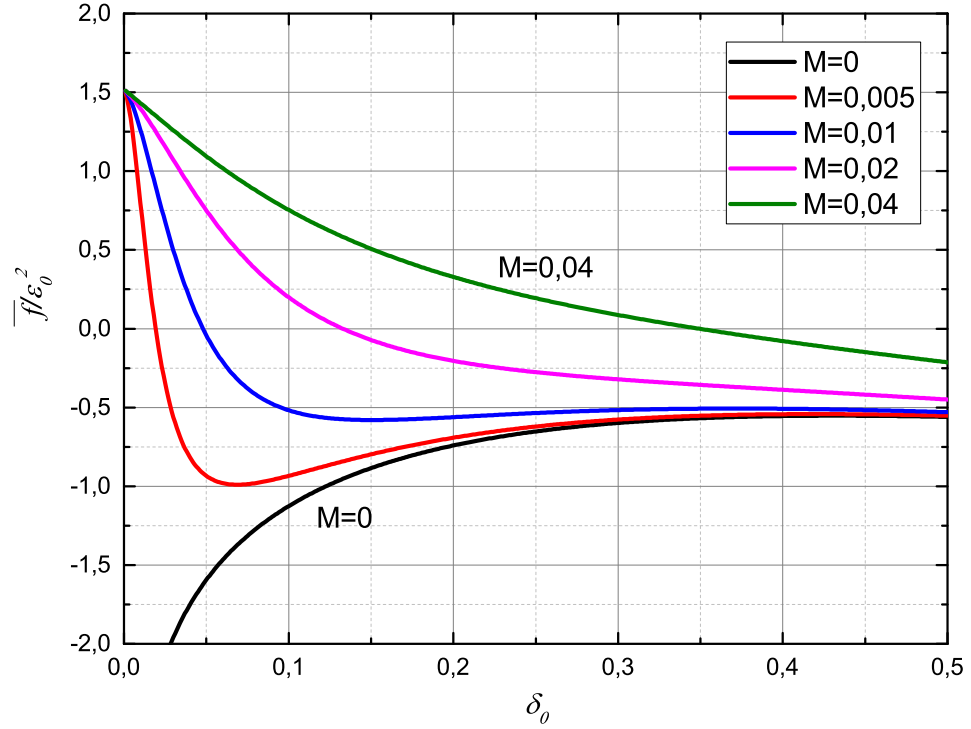


Рис. 4.8: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 5$ при разных параметрах M

4.2.2 Численное решение уравнений Лагранжа

Для проверки результатов, полученных методом осреднения, необходимо численно решить два уравнения Лагранжа для координат центров сфер z_1, z_2

$$2\pi\rho_l \frac{d}{dt} \left(2(A_1\dot{z}_1 - B\dot{z}_2) - C_{11}\dot{R}_1 - C_{12}\dot{R}_2 \right) = F_B + F_{\mu 1}, \quad (4.2.14)$$

$$2\pi\rho_l \frac{d}{dt} \left(2(A_2\dot{z}_2 - B\dot{z}_1) + C_{22}\dot{R}_2 + C_{21}\dot{R}_1 \right) = -F_B + F_{\mu 2}, \quad (4.2.15)$$

где $F_B = \partial T / \partial r$. Вязкие силы $F_{\mu 1}$ и $F_{\mu 2}$ были найдены с помощью аппроксимаций их точных выражений (см. главу 3) полиномами $P(h)$ третьей степени. Данная система уравнений второго порядка решалась численно для разных значений безразмерного параметра вязкости $M = \mu_l / \rho\omega R_{10}^2$. На Рис. 4.9 представлена зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt , найденная численным решением уравнений Лагранжа (4.2.14), (4.2.15) для двух одинаковых пузырьков ($R_2/R_1 = 1$) при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$. Для определенности движение пу-

пузырьков рассматривалось при начальном условии $\delta = 0,3$ и нулевыми скоростями центров пузырьков. Численное решение уравнений Лагранжа прекращалось при $\delta < 10^{-3}$, считая такое сближение достаточным для слияния пузырьков [72].

На Рис. 4.10 и 4.11 представлены зависимости $\delta(\omega t)$ для различных параметров $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = \{0,01 - 0,05\}$. Наличие слияния согласуется с результатами метода осреднения.

Из численных решений для времени сближения t^* с $\delta = 0,3$ до $\delta = 10^{-3}$ была получена эмпирическая зависимость $\omega t^* \propto M/\varepsilon_0^2$. При отсутствии же вязкости время сближения значительно меньше и пропорционально $\omega t^* \propto 1/\varepsilon_0$.

При отношениях радиусов пузырьков $R_2/R_1 = 2$ поведение системы аналогично случаю $R_2/R_1 = 1$ (см. Рис. 4.12 - 4.14). В литературе [37, 60-62] эксперименты по взаимодействию двух газовых пузырьков в акустическом поле давления рассматриваются с отношением радиусов в интервале $1 < R_2/R_1 < 2,4$. Представленные экспериментальные результаты соответствуют слиянию пузырьков, что согласуется с результатами данной диссертации.

При отношении радиусов пузырьков $R_2/R_1 \geq 3$ поведение системы принципиально меняется (см. Рис. 4.15 - 4.22). Возникает область параметров M, ε_0 для которых пузырьки сближаются на конечном среднем расстоянии около которого происходит периодическое движение (см. Рис. 4.15 - 4.17). Данное среднее расстояние монотонно растет с ростом M (см. Рис. 4.16) и согласуется с расстоянием нулевого значения средней силы метода осреднения (см. Рис. 4.6). Однако, если выбрать достаточно малый параметр M и большую относительную амплитуду пульсаций пузырьков ε_0 , то относительное расстояние $\delta(\omega t)$ при минимальном значении может быть ниже 10^{-3} (см. Рис. 4.18), что в соответствии с критерием будет означать слияние пузырьков. Из численных экспериментов для $\varepsilon_0 \in [0,001; 0,05]$ и $R_2/R_1 = 3$ было получено, что пузырьки не достигают критического расстояния (т.е. не сливаются) при выполнении соотношения

$$\frac{\varepsilon_0}{M} < 16/\lg(1/\varepsilon_0) - 4. \quad (4.2.16)$$

Величина $\varepsilon_0/M = \rho_l R_{10}(\omega R_{10}\varepsilon_0)\mu_l$ является аналогом числа Рейнольдса Re . Для него в экспериментальной работе [4] получено условие отсутствия слияния в виде $Re = \rho_l Rv/\mu_l < 12$, что качественно согласуется с (4.2.16).

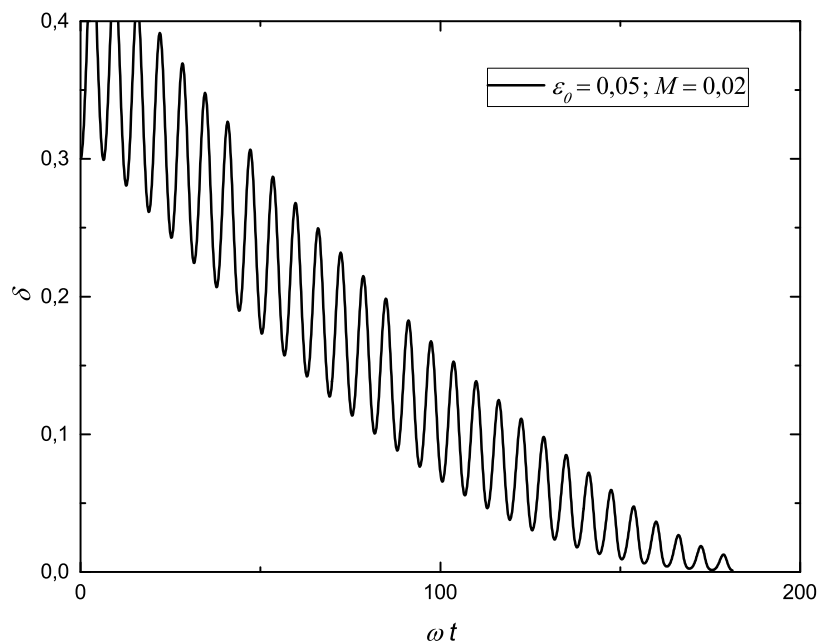


Рис. 4.9: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 1$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$.

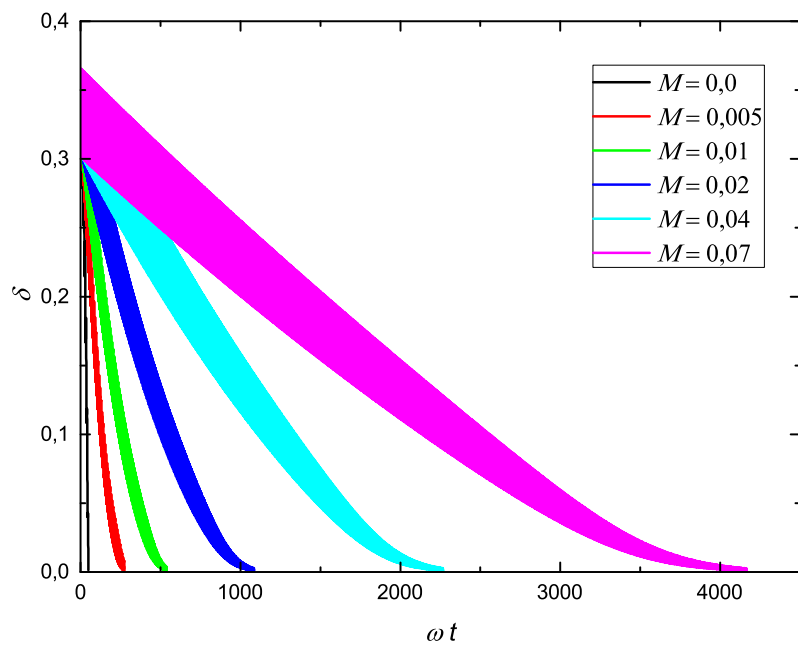


Рис. 4.10: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 1$ при $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$.

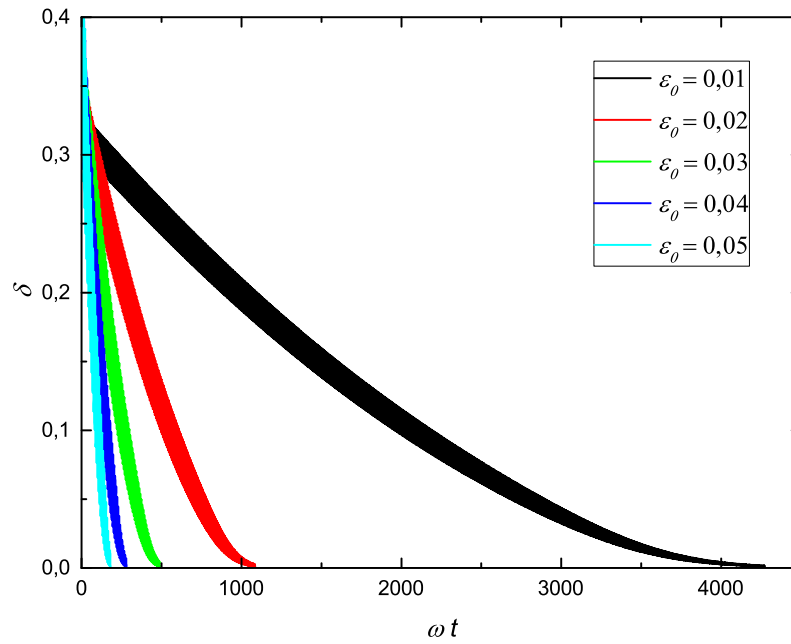


Рис. 4.11: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 1$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$.

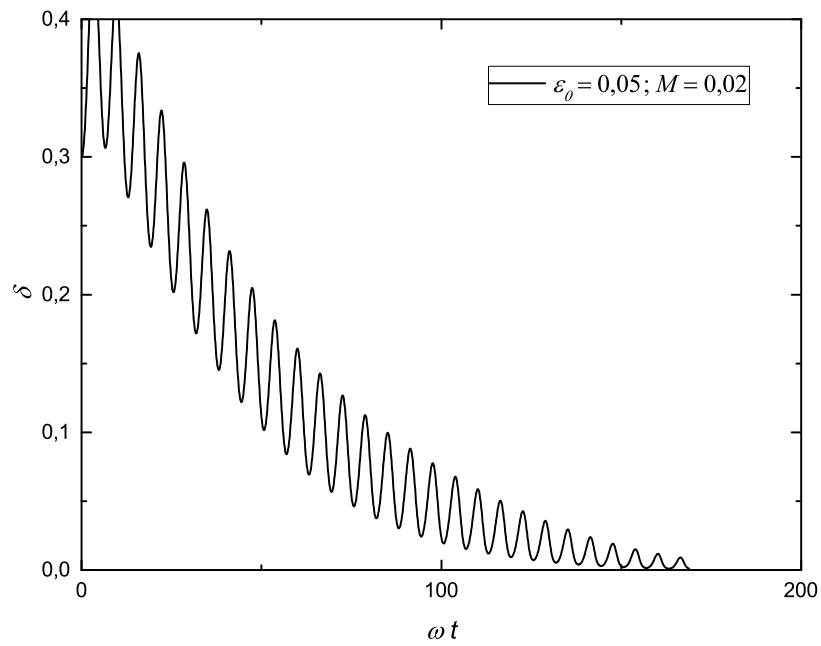


Рис. 4.12: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 2$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$.

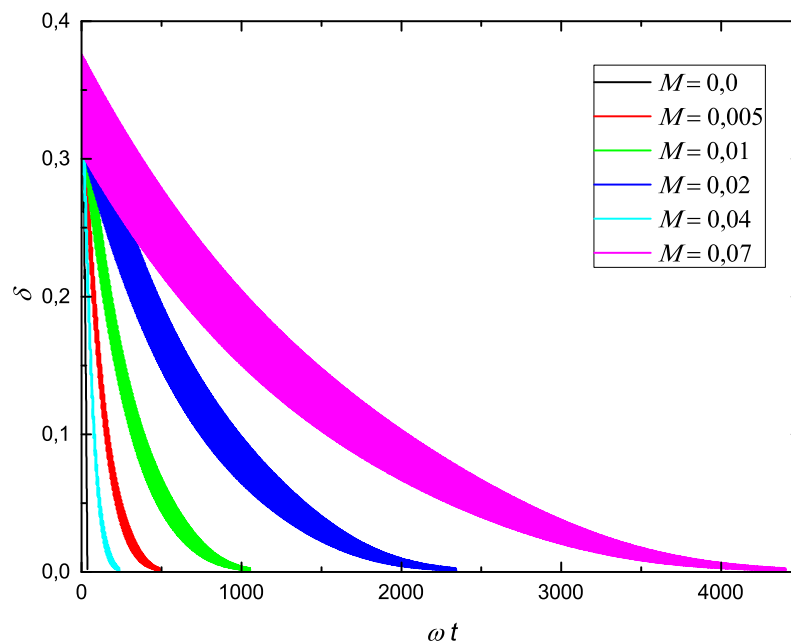


Рис. 4.13: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 2$ при $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$.

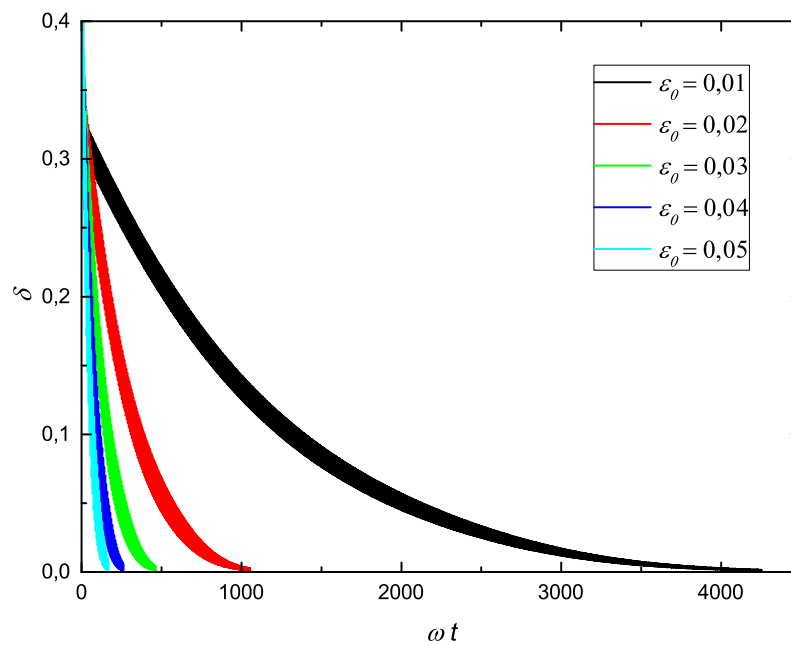


Рис. 4.14: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 2$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$.

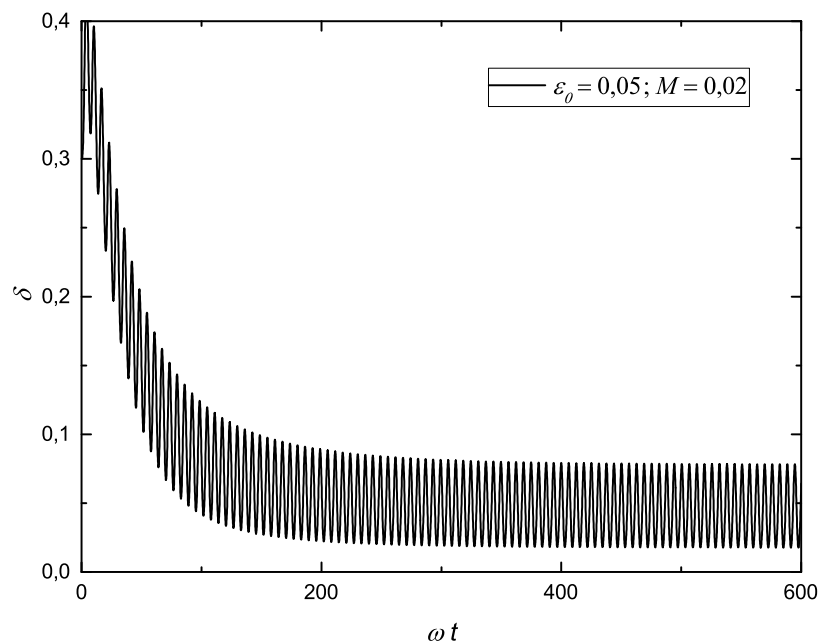


Рис. 4.15: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$.

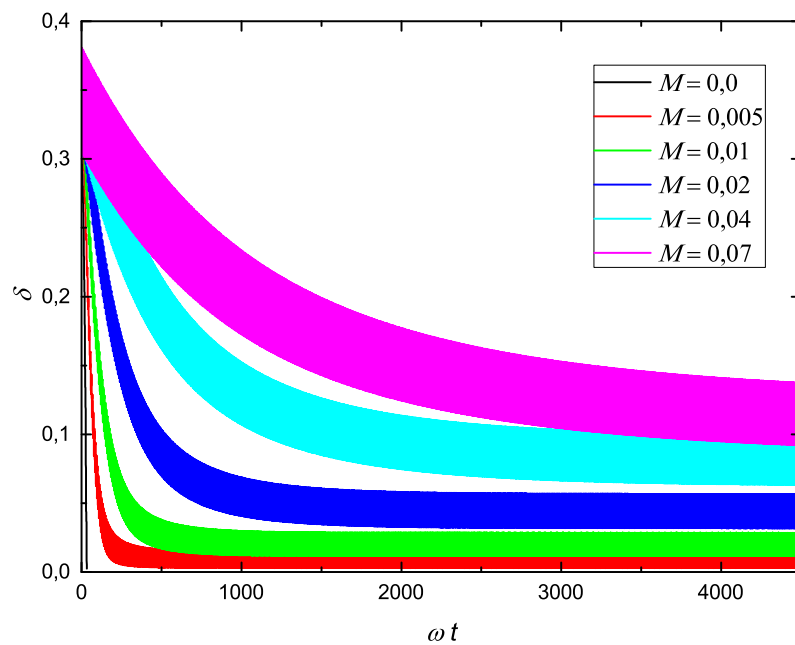


Рис. 4.16: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$.

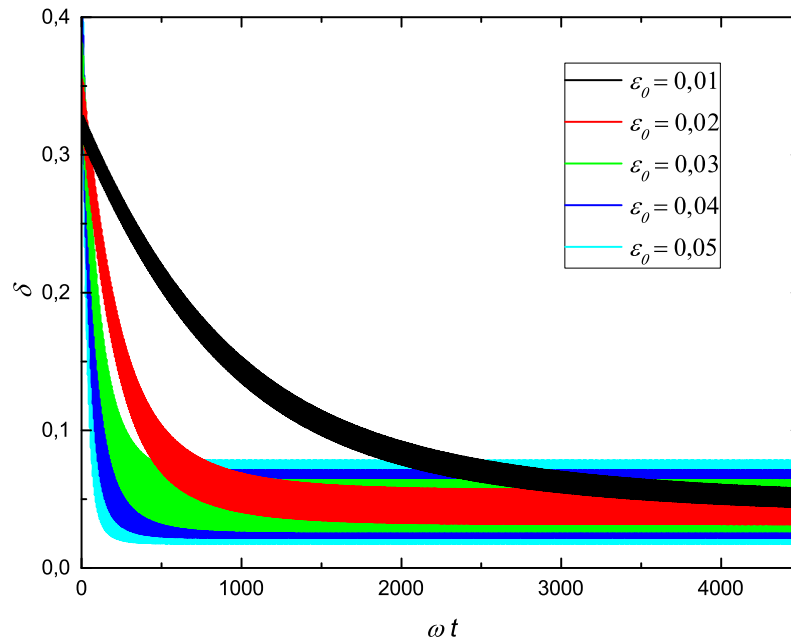


Рис. 4.17: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$.

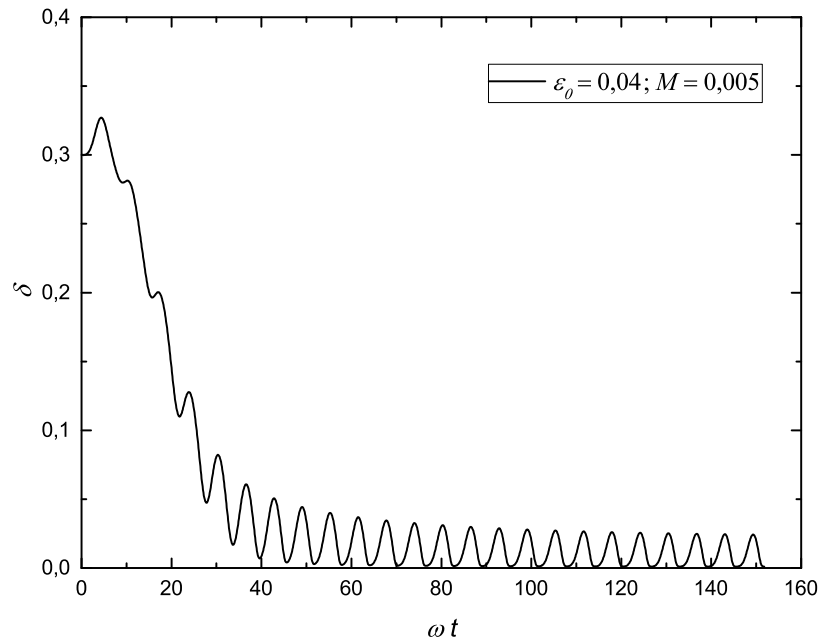


Рис. 4.18: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = 0,005$ и $\varepsilon_0 = 0,04$.

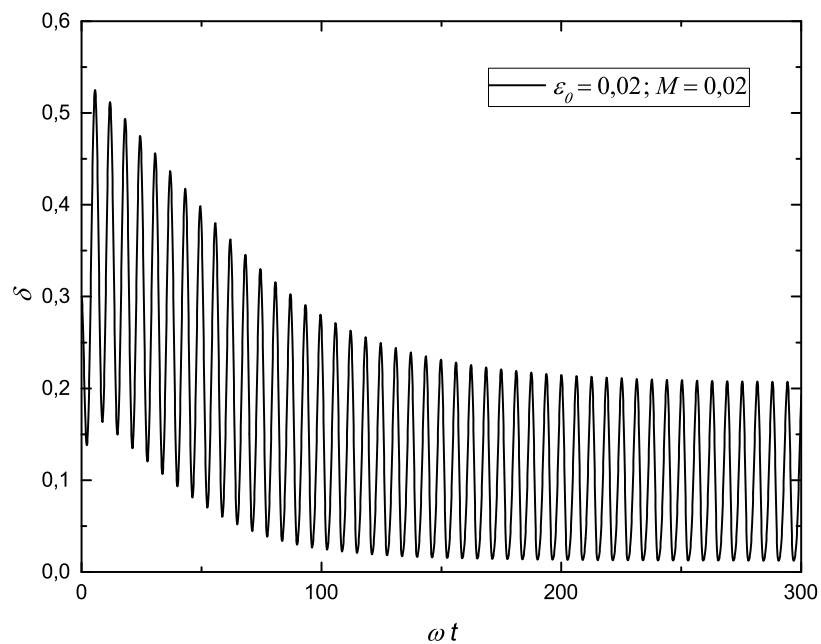


Рис. 4.19: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,02$.

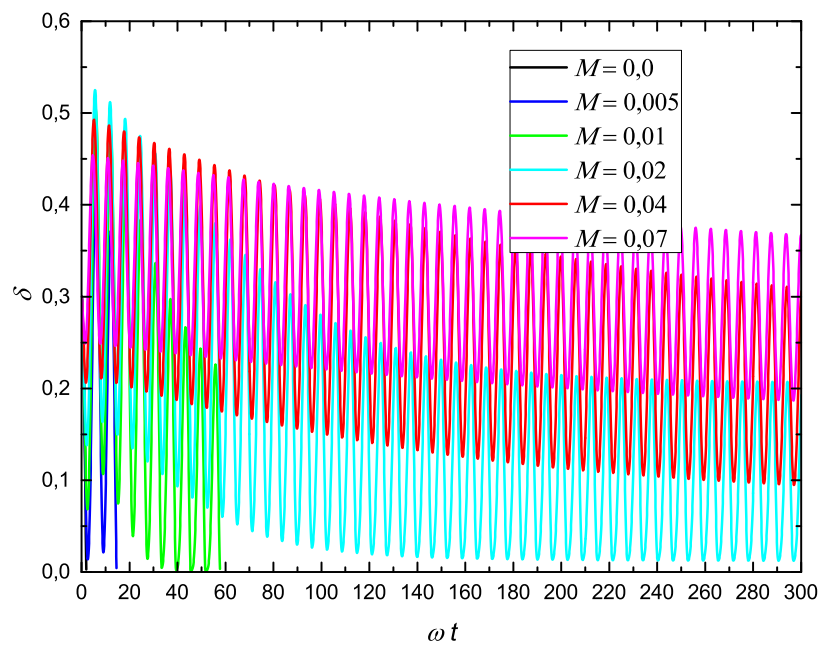


Рис. 4.20: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$.

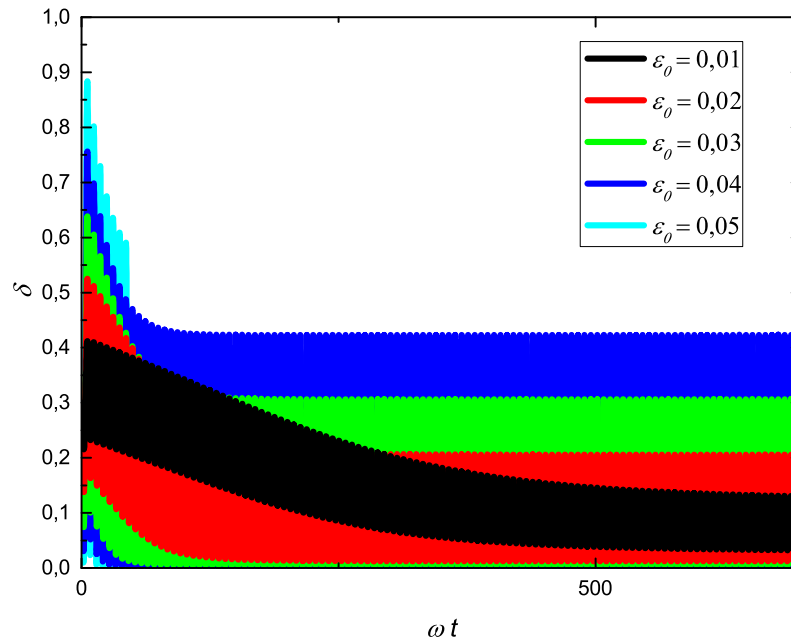


Рис. 4.21: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$.

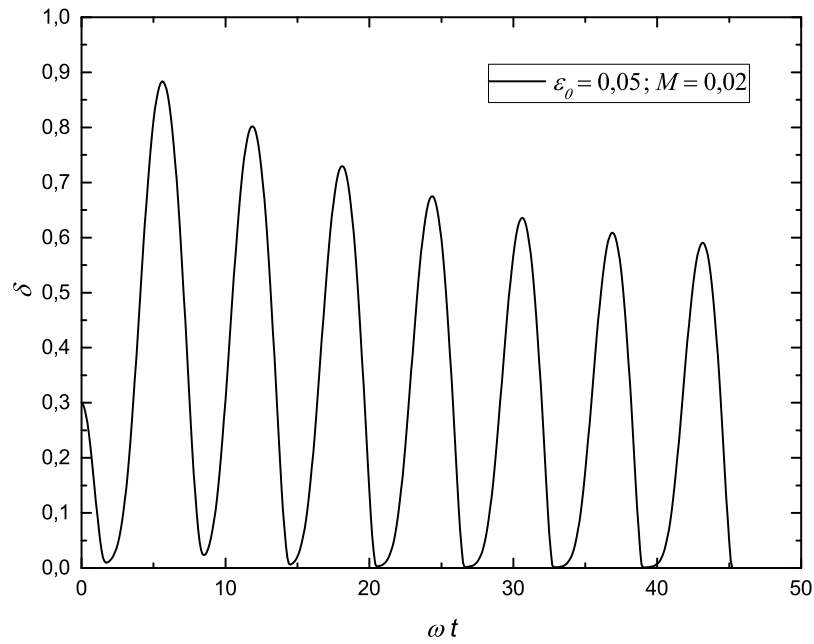


Рис. 4.22: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$.

4.3 Случай свободной границы

4.3.1 Решение методом осреднения

Аналогично можно построить выражения для средней силы $\bar{f}(M, k, \delta_0)$ для граничных условий, соответствующих нулевому тангенциальному напряжению. Средняя сила оказывается отрицательной для всех рассмотренных значений параметров для различных отношений радиусов (см. Рис. 4.23). Это означает, что пузырьки при отсутствии поверхностно-активных веществ (дистиллированная вода) всегда сливаются в акустическом переменном поле давления.

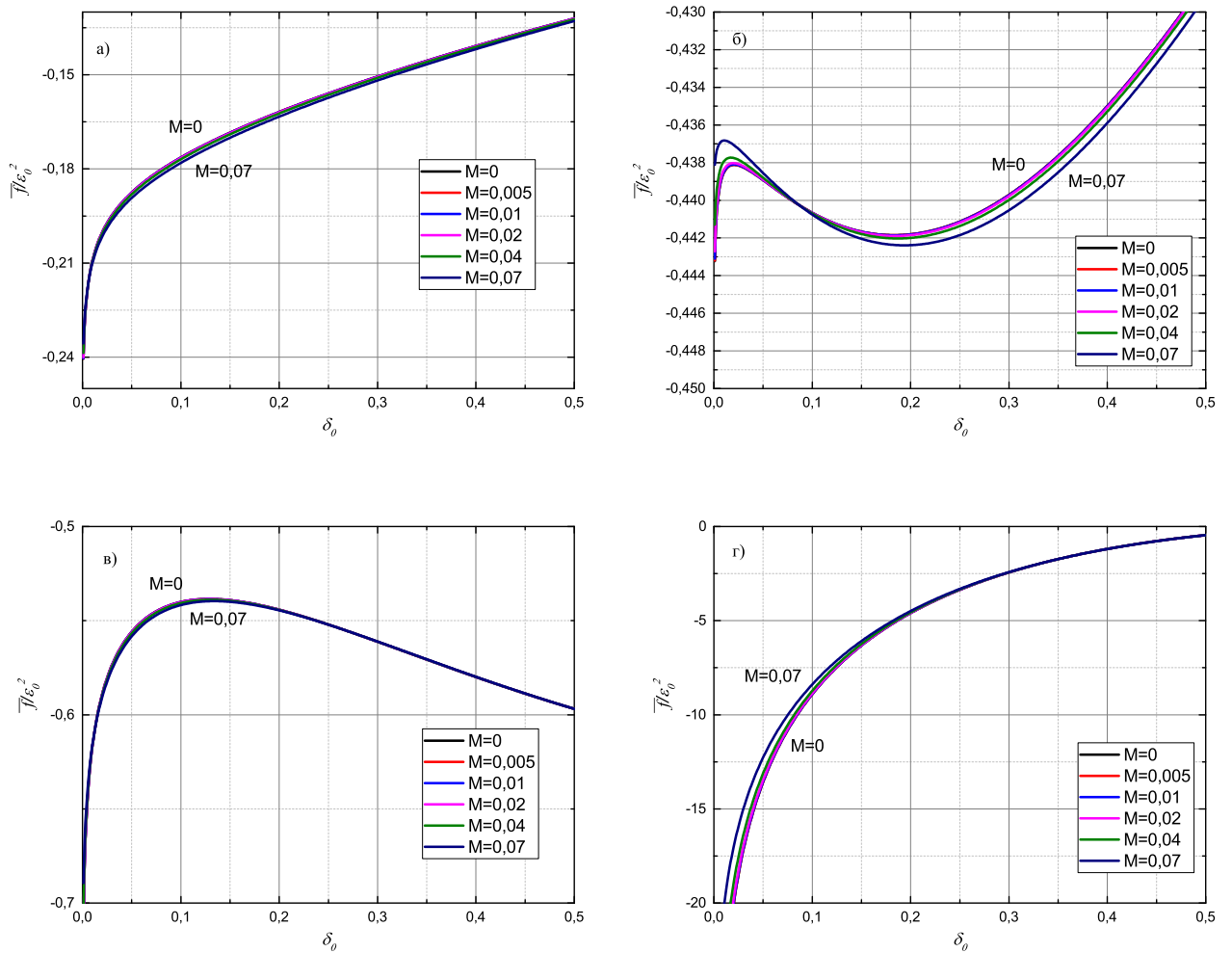


Рис. 4.23: Зависимость осредненной силы \bar{f}/ϵ_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 при разных параметрах M для отношений радиусов а) $R_2/R_1 = 1$, б) $R_2/R_1 = 2$, в) $R_2/R_1 = 3$, г) $R_2/R_1 = 10$, (случай свободной границы).

4.3.2 Численное решение уравнений Лагранжа

Численные решения уравнений Лагранжа (4.2.14), (4.2.15) с вязкой силой, найденной из условия на свободной границе, также подтверждают результат слияния пузырьков, полученного методом осреднения. Проверка осуществлялась для отношений радиусов $R_2/R_1 = \{1, 3, 10\}$, зависимости относительного расстояния $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для различных параметров M и ε_0 представлены на Рис. 4.24 - 4.26.

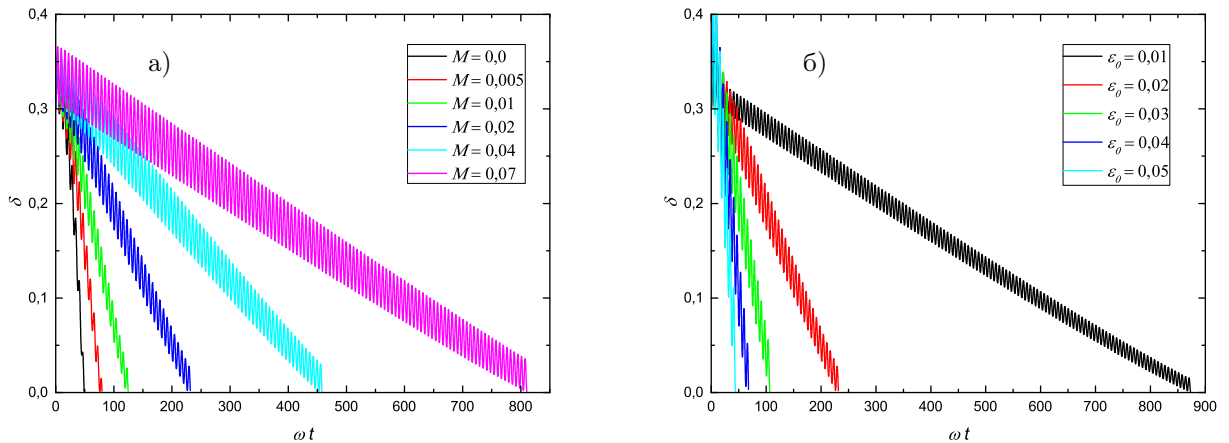


Рис. 4.24: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 1$ при а) $M = \{0, 0, 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$, б) $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$ (случай свободной границы).

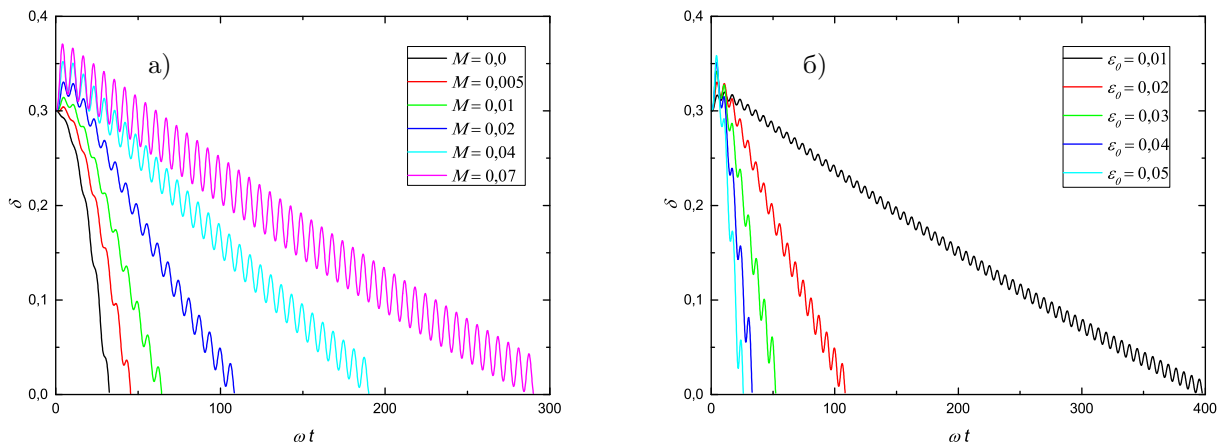


Рис. 4.25: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при а) $M = \{0, 0, 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$, б) $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$ (случай свободной границы).

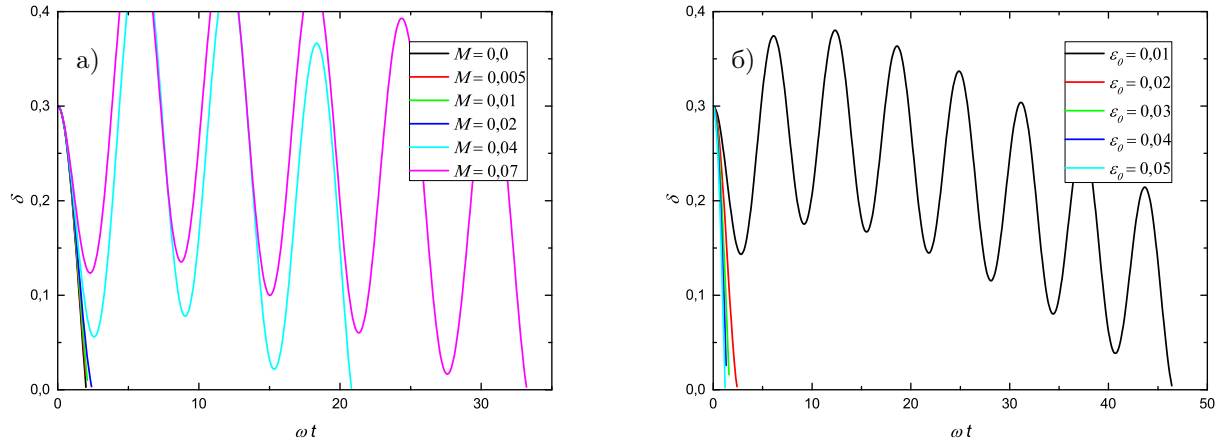


Рис. 4.26: Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при а) $M = \{0, 0, 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$, б) $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$ (случай свободной границы).

4.4 Общий случай

Для общего случая скольжения на границе, рассмотренного в параграфе 3.6.3, можно получить условия отсутствия слияния аналогичными методами. В эти условия будет входить дополнительно параметр скольжения λ , который меняется от 0 в случае прилипания, до бесконечности в случае свободной границы. Условия отсутствия слияния соответствуют малым значениям параметра λ . Этот случай наиболее интересен и результаты будут близки к изученному случаю прилипания на границе пузырьков. При рассмотрении движения сферических газовых пузырьков с поверхностно-активными веществами λ можно оценить в соответствии с обзором [63] как $\lambda \sim 10$ нм. Учитывая, что критическое расстояние между сферами для их слияния также порядка 10 нм, можно сделать вывод, что условия слияния и его отсутствия принципиально не изменятся.

4.5 Выводы

Получено аналитическое условие слияния пузырьков в переменном поле давления. Условие подтверждается численным решением точных уравнений динамики пузырьков. Пузырьки сливаются при отношении радиусов меньше 2,8, а при отношении больше 3 в зависимости от параметра вязкости и ам-

плитуды пульсаций слияние может отсутствовать. В случае отсутствия тангенциального напряжения пузырьки всегда сливаются.

Заключение

1. Точно решена краевая задача для движения двух пульсирующих сфер, центры которых двигаются вдоль оси симметрии в потенциальном потоке идеальной жидкости и из нее найдена новая форма для коэффициентов кинетической энергии жидкости.
2. Достоверность новой формы обосновывается доказательством ее тождественности с известным решением.
3. Разработана процедура построения всех членов разложения коэффициентов кинетической энергии по малому расстоянию между поверхностями сфер (зазору между сферами) в окрестности их контакта.
4. В приближении Стокса найдены выражения вязких сил взаимодействия двух пульсирующих сфер, центры которых двигаются вдоль оси симметрии.
5. Построено двухчленное разложение вязких сил, действующих на сферы вблизи контакта. Главный член обратно пропорционален малому зазору, а второй член зависит от него логарифмически.
6. Составлены 4 уравнения Лагранжа для координат центров и радиусов пузырьков.
7. Показано, что для частоты акустического воздействия много меньшей собственной частоты колебаний пузырьков относительные амплитуды пульсаций пузырьков меняются по одинаковому закону, тем самым было уменьшено количество уравнений Лагранжа до 2.
8. Доказано, что приближенно выполняется закон сохранения импульса системы и с помощью метода исключения циклической координаты Рауса система уравнений сведена к одному динамическому уравнению.

9. Методом осреднения при малой амплитуде пульсаций пузырьков получено условие слияние пузырьков. При отношении радиусов пузырьков меньше 2,8 пульсирующие в периодическом поле давления пузырьки сближаются до их контакта. При отношении радиусов больше 3 сближение прекращается и устанавливается равновесный зазор между пузырьками. Достоверность аналитического решения, полученного методом осреднения, подтверждается сравнением с численным решением полных динамических уравнений.

Список сокращений и условных обозначений

Обозначение	Размерность	Описание
$A_1, B, A_2,$ $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ D_1, E, D_2	$[м^3]$	коэффициенты квадратичной формы кинетической энергии жидкости
a_n, b_n, c_n, d_n	$[м^3/с]$	коэффициенты функции $U_n(\xi)$ в случае вязкого течения жидкости
α_n, β_n	$[м^3/с]$	коэффициенты функции $U_n(\xi)$ в случае течения идеальной жидкости
β_1, β_2 (Гл. 3)	$[Па \cdot с/м]$	коэффициенты проскальзывания на границе сфер
$C_n^\nu(\mu)$	$[-]$	n полином Гегенбауэра
c	$[м]$	размерный параметр перехода к бисферическим координатам
δ	$[-]$	относительное расстояние между сферами h/R_1
δ_0	$[-]$	среднее значение δ при установившихся малых осцилляциях
$\varepsilon_i(t)$	$[-]$	относительное изменение радиуса $R_i(t)$
ε_0	$[-]$	амплитуда $\varepsilon_i(t)$
F_B	$[Н]$	обобщенная сила Бьеркнеса $\partial T/\partial r$
$F_{\mu i}$	$[Н]$	вязкие силы действующие на сферы
\bar{f}	$[-]$	безразмерная осредненная сила
γ	$[-]$	показатель адиабаты газа
h	$[м]$	расстояние между поверхностями сфер
I_i	$[кг \cdot м/с]$	обобщенные импульсы

Обозначение	Размерность	Описание
I	[кг·м/с]	полный импульс системы
k	[-]	отношение радиусов R_2/R_1
L	[Дж]	Функция Лагранжа $T - \Pi$
λ_i (Гл. 2)	[-]	параметры равные $\tau_i/(\tau_1 + \tau_2)$
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ (Гл. 3)	[м]	длина скольжения на границе сфер
$M = \mu_l/(\rho_l R_{10}^2 \omega)$	[-]	безразмерный параметр вязкости
$\mu = \cos \zeta$	[-]	аргумент полинома Гегенбауэра $C_n^\nu(\mu)$
μ_l	[Па·с]	вязкость жидкости
Π	[Дж]	потенциальная энергия двух пузырьков
$p(t)$	[Па]	давление в момент времени t
p_{i0}	[Па]	давление в i -ом пузырьке в отсутствии пульсации внешнего давления
p_∞	[Па]	среднее статическое давление
Δp	[Па]	амплитуда колебаний давления
R	[м]	характерный радиус пузырьков (сфер)
$R_i(t)$	[м]	радиусы сферических пузырьков
\dot{R}_i	[м/с]	скорости изменения радиусов сфер
R_{i0}	[м]	радиусы сферических пузырьков в отсутствии пульсации давления
$\bar{R} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	[м]	приведенный радиус пузырьков
r	[м]	расстояние между центрами сфер
(ρ, θ, z)	[-]	цилиндрическая система координат
ρ_l	[кг/м ³]	плотность жидкости
σ	[Н/м]	коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость-газ
T	[Дж]	Кинетическая энергия жидкости
T_R	[Дж]	Функция Рауса
$\tau_1, -\tau_2$	[-]	координата ξ положений сфер
$U_n(\xi)$	[м ³ /с]	весовые функции при разложении функции тока по полиномам Гегенбауэра
$u_1 = -\dot{z}_1$	[м/с]	скорости центров сфер направленные на встречу друг друга
$u_2 = \dot{z}_2$		

Обозначение	Размерность	Описание
ψ	[-]	функция тока Стокса
ω	[рад/с]	круговая частота акустического поля давления
ω_0	[рад/с]	собственная круговая частота радиальных колебаний пузырька
(ξ, ζ, θ)	[-]	бисферические координаты
z_i	[м]	координата центра i сферы по оси Oz
z_{sum}	[м]	циклическая координата $z_1 + z_2$

Литература

- [1] *Аганин А. А., Давлетшин А. И.* Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21. – №. 6. – С. 89-102.
- [2] *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Взаимодействие двух сферических газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле // Вестник Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета. 2011. No 3(25). С. 6–13.
- [3] *Блехман И. И.* Вибрационная механика. – М : Наука. Физматлит, 1994.
- [4] *Бошнятов Б. В.* Роль гидродинамического взаимодействия при коалесценции пузырьков газа в жидкости // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 427. – №. 3. – С. 321-323.
- [5] *Бэтчелор Д. К.* Введение в динамику жидкости. 1973 // М: Мир.
- [6] *Воинов О. В.* Движение идеальной жидкости около двух сфер с радиальными скоростями на поверхности // Вестник Московского университета. – 1969. – №. 5. – С. 83-88.
- [7] *Воинов О. В.* О движении двух сфер в идеальной жидкости // ПММ. – 1969. – Т. 33. – №. 4. – С. 659.
- [8] *Воинов О.В.* Движение двух сфер переменных радиусов в идеальной жидкости. В сб.: Науч. конференция. Ин-т механ. МГУ. Тезисы докл. М., 1970, С. 10-12
- [9] *Воинов О. В., Головин А. М.* Уравнения Лагранжа для системы пузырей изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1970. – С. 117-123.

- [10] *Воинов О. В., Петров А. Г.* Движение пузырей в жидкости // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. – 1976. – Т. 10. – С. 86-147.
- [11] *Ганиев Р. Ф., Украинский Л. Е.* Нелинейная волновая механика и технологии. Волновые и колебательные явления в основе высоких технологий // М.: Институт компьютерных исследований. – 2011.
- [12] *Дерягин Б. В., Духин С. С., Рулев Н. Н.* Микрофлотация // М.: Химия. – 1986. – Т. 112.
- [13] *Заболотская Е. А.* Взаимодействие газовых пузырьков в поле звуковой волны // Акуст. журн. – 1984. – Т. 30. – №. 5. – С. 618-623.
- [14] *Зинченко А. З.* К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса // Прикладная математика и механика. – 1978. Т. 42 – №. 5. – С. 955-959.
- [15] *Зинченко А. З.* Расчет близкого взаимодействия капель с учетом внутренней циркуляции и эффектов скольжения // Прикладная математика и механика. – 1981. Т. 45 – №. 4. – С. 759-763.
- [16] *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997
- [17] *Казанцев В. Ф.* Движение газовых пузырьков в жидкости под действием сил Бьеркнеса, возникающих в акустическом поле // ДАН СССР. – 1959. – Т. 129. – №. 1. – С. 64-67.
- [18] *Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М.* Эффект самопросветления для акустических волн в жидкости с пузырьками газа // Письма в ЖЭТФ. – 1979. – Т. 30. – №. 7. – С. 423-425.
- [19] *Кузнецов Г. Н., Щукин И. Е.* Взаимодействие пульсирующих пузырьков в вязкой жидкости // Акустический журнал. – 1972. – Т. 18. – №. 4. – С. 565-570.
- [20] *Ламб Г.* Гидродинамика // М.: Гостехиздат. – 1947. – С. 928.
- [21] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.,* Гидродинамика М.: Наука. 1986. Стр. 130-132

- [22] *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: учебник для университетов. М.: Издательство «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. – 592 с.
- [23] *Нигматуллин Р. И.* Динамика многофазных сред. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – Т. 1., Т. 2.
- [24] *Нигматуллин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978.
- [25] *Петров А. Г.* Аналитическая гидродинамика. – 2010.
- [26] *Петров А. Г.* Вынужденные колебания в жидкости двух газовых пузырей в окрестности их контакта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2011. – №. 4. – С. 81-99.
- [27] *Петров А.Г., Харламов А.А.* Пространственные задачи гидродинамического взаимодействия тел в вязкой жидкости в окрестности их контакта // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 5. С. 14-25.
- [28] *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. – 1963.
- [29] *Allen, J. S., Kruse, D. E., Dayton, P. A., and Ferrara, K. W.* Effect of coupled oscillations on microbubble behavior // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2003. – Vol. 114. – no. 3. – P. 1678-1690.
- [30] *Apostol T. M.* Introduction to analytic number theory. – Springer Science & Business Media, 2013.
- [31] *Barbat T., Ashgriz N., Liu C. S.* Dynamics of two interacting bubbles in an acoustic field // Journal of Fluid Mechanics. – 1999. – Vol. 389. – P. 137-168.
- [32] *Basset A. B.* A Treatise on Hydrodynamics, vol. 2. Deighton, Bell and Company. – 1961.
- [33] *Bentwich M., Miloh T.* On the exact solution for the two-sphere problem in axisymmetrical potential flow // Journal of Applied Mechanics. – 1978. – Vol. 45. – no. 3. – P. 463-468.
- [34] *Bjerknes V.* Fields of force: supplementary lectures, applications to meteorology; a course of lectures in mathematical physics delivered December 1 to 23, 1905. – The Columbia university press, 1906. – no. 1.

- [35] *Brenner H.* The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface // *Chemical Engineering Science*. – 1961. – Vol. 16. – no. 3-4. – P. 242-251.
- [36] *Chen S. H., Keh H. J.* Axisymmetric motion of two spherical particles with slip surfaces // *Journal of colloid and interface science*. – 1995. – Vol. 171. – no. 1. – P. 63-72.
- [37] *Cleve S., Guédra M., Inserra C., Mauger C. and Blanc-Benon P.* Surface modes with controlled axisymmetry triggered by bubble coalescence in a high-amplitude acoustic field // *Physical Review E*. – 2018. – Vol. 98. – no. 3. – P. 033115.
- [38] *Cooley M. D. A., O’neill M. E.* On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere // *Mathematika*. – 1969. – Vol. 16. – no. 1. – P. 37-49.
- [39] *Coussios C. C., Roy R. A.* Applications of acoustics and cavitation to noninvasive therapy and drug delivery // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2008. – Vol. 40. – P. 395-420.
- [40] *Cox R. G., Brenner H.* The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface—II Small gap widths, including inertial effects // *Chemical Engineering Science*. – 1967. – Vol. 22. – no. 12. – P. 1753-1777.
- [41] *Crum L. A.* Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 1975. – Vol. 57. – no. 6. – P. 1363-1370.
- [42] *Davis M. H.* Collisions of small cloud droplets: Gas kinetic effects // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 1972. – Vol. 29. – no. 5. – P. 911-915.
- [43] *Davis M. H.* The slow translation and rotation of two unequal spheres in a viscous fluid // *Chemical Engineering Science*. – 1969. – Vol. 24. – no. 12. – P. 1769-1776.
- [44] *Dingle R. B.* Asymptotic expansions: their derivation and interpretation. – London : Academic Press, 1973.

- [45] *Doinikov A. A.* Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // *Physical review E*. – 2001. – Vol. 64. – no. 2. – P. 026301.
- [46] *Doinikov A. A.* Viscous effects on the interaction force between two small gas bubbles in a weak acoustic field // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2002. – Vol. 111. – no. 4. – P. 1602-1609.
- [47] *Doinikov A. A., Bouakaz A.* Theoretical model for coupled radial and translational motion of two bubbles at arbitrary separation distances // *Physical Review E*. – 2015. – Vol. 92. – no. 4. – P. 043001.
- [48] *Garbin V., Cojoc D., Ferrari E., Di Fabrizio E., Overvelde M. L. J., van der Meer S. M., de Jong N., Lohse D. and Versluis M.* Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging // *Applied physics letters*. – 2007. – Vol. 90. – no. 11. – P. 114103.
- [49] *Goren S. L.* The hydrodynamic force resisting the approach of a sphere to a plane wall in slip flow // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 1973. – Vol. 44. – no. 2. – P. 356-360.
- [50] *Grashchenkov S. I.* The effect of slip on the Motion of Two Droplets and of a Droplet Close to a Plane Surface of a Liquid // *Aerosol science and technology*. – 1996. – Vol. 25. – no. 2. – P. 101-112.
- [51] *Haber S., Hetsroni G., Solan A.* On the low Reynolds number motion of two droplets // *International Journal of Multiphase Flow*. – 1973. – Vol. 1. – no. 1. – P. 57-71.
- [52] *Happel J., Brenner H.* *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*. – Springer Science & Business Media, 1983.
- [53] *Harkin A., Kaper T. J., Nadim A. L. I.* Coupled pulsation and translation of two gas bubbles in a liquid // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2001. – Vol. 445. – P. 377-411.
- [54] *Hicks W. M.* On the motion of two spheres in a fluid // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. – 1880. – no. 171. – P. 455-492.

- [55] *Hicks W. M.* On the problem of two pulsating spheres in a fluid // Proc. Camb. Phil. Soc., 1879, vol. III
- [56] *Hicks W. M.* On the problem of two pulsating spheres in a fluid (part II) // Proc. Camb. Phil. Soc., 1879, vol. IV
- [57] *Hocking L. M.* The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and of two adjacent spheres // Journal of Engineering Mathematics. – 1973. – Vol. 7. – no. 3. – P. 207-221.
- [58] *Jeffrey D. J.* Low-Reynolds-number flow between converging spheres // Mathematika. – 1982. – Vol. 29. – no. 1. – P. 58-66.
- [59] *Jeffery G. B.* On a form of the solution of Laplace's equation suitable for problems relating to two spheres // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. – 1912. – Vol. 87. – no. 593. – P. 109-120.
- [60] *Jiao J., He Y., Kentish S. E., Ashokkumar M., Manasseh R. and Lee, J.* Experimental and theoretical analysis of secondary Bjerknes forces between two bubbles in a standing wave // Ultrasonics. – 2015. – Vol. 58. – P. 35-42.
- [61] *Jiao J., He Y., Leong T., Kentish S. E., Ashokkumar M., Manasseh R. and Lee J.* Experimental and theoretical studies on the movements of two bubbles in an acoustic standing wave field // The Journal of Physical Chemistry B. – 2013. – Vol. 117. – no. 41. – P. 12549-12555.
- [62] *Jiao J., He Y., Yasui K., Kentish S. E., Ashokkumar M., Manasseh R. and Lee J.* Influence of acoustic pressure and bubble sizes on the coalescence of two contacting bubbles in an acoustic field // Ultrasonics sonochemistry. – 2015. – Vol. 22. – P. 70-77.
- [63] *Lauga E., Brenner M., Stone H.* Microfluidics: the no-slip boundary condition // Springer handbook of experimental fluid mechanics. – 2007. – P. 1219-1240.
- [64] *Maksimov A. O., Polovinka Y. A.* Scattering from a pair of closely spaced bubbles // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2018. – Vol. 144. – no. 1. – P. 104-114.

- [65] *Maksimov A. O., Yusupov V. I.* Coupled oscillations of a pair of closely spaced bubbles // *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. – 2016. – Vol. 60. – P. 164-174.
- [66] *Mettin R., Akhatov I., Parlitz U., Ohl C. D. and Lauterborn W.* Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field // *Physical review E*. – 1997. – Vol. 56. – no. 3. – P. 2924.
- [67] *Michelin S., Guérin E., Lauga E.* Collective dissolution of microbubbles // *Physical Review Fluids*. – 2018. – Vol. 3. – no. 4. – P. 043601.
- [68] *Michelin S., Gallino, G., Gallaire, F., Lauga, E.* Viscous growth and rebound of a bubble near a rigid surface // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2019. – Vol. 860. – P. 172-199.
- [69] *Morioka M.* Theory of natural frequencies of two pulsating bubbles in infinite liquid // *Journal of Nuclear Science and Technology*. – 1974. – Vol. 11. – no. 12. – P. 554-560.
- [70] *Neumann C.* Hydrodynamische untersuchungen: nebst einem Anhang über die Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induction. – BG Teubner, 1883.
- [71] *Oguz H. N., Prosperetti A.* A generalization of the impulse and virial theorems with an application to bubble oscillations // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1990. – Vol. 218. – P. 143-162.
- [72] *Oolman T. O., Blanch H. W.* Bubble coalescence in stagnant liquids // *Chemical Engineering Communications*. – 1986. – Vol. 43. – no. 4-6. – P. 237-261.
- [73] *Pandey V.* Asymmetry and sign reversal of secondary Bjerknes force from strong nonlinear coupling in cavitation bubble pairs // *Physical Review E*. – 2019. – Vol. 99. – no. 4. – P. 042209.
- [74] *Raszillier H., Durst F.* Short-distance asymptotics of the added-mass matrix of two spheres of equal diameter // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. – 1989. – Vol. 42. – no. 1. – P. 85-98.

- [75] *Raszillier H., Guiasu I., Durst F.* Optimal approximation of the added mass matrix of two spheres of unequal radii by an asymptotic short distance expansion // ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1990. – Vol. 70. – no. 2. – P. 83-90.
- [76] *Reed L. D., Morrison Jr F. A.* Particle interactions in viscous flow at small values of Knudsen number // Journal of Aerosol Science. – 1974. – Vol. 5. – no. 2. – P. 175-189.
- [77] *Selby A. L.* On two pulsating spheres in a liquid // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1890. – Vol. 29. – no. 176. – P. 113-123.
- [78] *Stimson M., Jeffery G. B.* The motion of two spheres in a viscous fluid // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. – 1926. – Vol. 111. – no. 757. – P. 110-116.
- [79] *Wacholder E., Weihs D.* Slow motion of a fluid sphere in the vicinity of another sphere or a plane boundary // Chemical Engineering Science. – 1972. – Vol. 27. – no. 10. – P. 1817-1828.
- [80] *Witze C. P., Schrock V. E., Chambre P. L.* Flow about a growing sphere in contact with a plane surface // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1968. – Vol. 11. – no. 11. – P. 1637-1652.
- [81] *Zilonova E., Solovchuk M., Sheu T. W. H.* Dynamics of bubble-bubble interactions experiencing viscoelastic drag // Physical Review E. – 2019. – Vol. 99. – no. 2. – P. 023109.

Работы автора по теме диссертации

- [82] *Sanduleanu S. V., Petrov A. G.* Interaction of two pulsating spherical bubbles in external pressure field near the contact // Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2015. – Vol. 656. – no. 1. – P. 012035. (WoS, Scopus)

- [83] *Сандуляну Ш. В., Петров А. Г.* Трехчленные разложения коэффициентов кинетической энергии идеальной жидкости при движении в ней двух сфер вблизи их контакта // Доклады Академии наук. — 2018. — Т. 483, № 4. — С. 389–393. (WoS, Scopus)
- [84] *Sanduleanu S. V.* Fluid kinetic energy asymptotic expansion for two variable radii moving spherical bubbles at small separation distance // arXiv:1912.05936 – 2019.

Тезисы докладов

- [85] *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* О слиянии двух газовых пузырьков во внешнем периодическом поле давления // 55-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 19-25 ноября 2012
- [86] *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Взаимодействие двух пульсирующих газовых пузырьков во внешнем периодическом поле давления // 57-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 24-29 ноября 2014
- [87] *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Взаимодействие двух пульсирующих газовых пузырьков во внешнем периодическом поле давления // Материалы XIX международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. ВМСППС'2015. 24-31 мая 2015 г. Алушта.
- [88] *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Вынужденные колебания газовых пузырьков в жидкости вблизи контакта // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Казань, 2015 г.
- [89] *Сандуляну Ш.В.* Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости вблизи контакта // Всероссийская конференция с международным участием "Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва посвященная 60-летию Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, г. Новосибирск, 2017.

- [90] *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Трехчленные разложения коэффициентов кинетической энергии идеальной жидкости при движении в ней двух сфер вблизи их контакта // 61-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 19-25 ноября 2018.
- [91] *Сандуляну Ш.В.* Силы взаимодействия двух пульсирующих в жидкости пузырьков вблизи контакта // XXI Международная конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 24-31 мая 2019.
- [92] *Сандуляну Ш.В., Петров А.Г.* Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости вблизи их контакта в пульсирующем поле давления // 62-ая Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 18-24 ноября 2019.
- [93] *Сандуляну Ш.В.* Силы вязкого взаимодействия двух пульсирующих пузырьков в жидкости вблизи их контакта // 10-ая международная научная школа молодых ученых "Волны и вихри в сложных средах Москва, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 3 - 5 декабря 2019

Список иллюстраций

1.1	Постановка задачи	16
1.2	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 3$ при разных параметрах M . . .	18
1.3	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$	19
2.1	Постановка задачи	23
2.2	Остаточный член $ r_X^m $ ($X = \{A_1, C_{11}, D_1\}$) в зависимости от m для разных расстояний между пузырьками: $h/\bar{R} = \{2,1,0.5,0.2,0.1\}$ при $R_2/R_1 = 1$	48
2.3	Остаточный член $ r_X^m $ ($X = \{A_1, C_{11}, D_1\}$) в зависимости от m для разных расстояний между пузырьками: $h/\bar{R} = \{2,1,0.5,0.2,0.1\}$ при $R_2/R_1 = 3$	49
2.4	Остаточный член $ r_X^m $ ($X = \{A_1, C_{11}, D_1\}$) в зависимости от m для разных расстояний между пузырьками: $h/\bar{R} = \{2,1,0.5,0.2,0.1\}$ при $R_2/R_1 = 10$	50
2.5	Сходимость приближений (а) коэффициента A_1 и (б) производной dA_1/dh полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (жирная линия).	54
2.6	Сходимость приближений (а) коэффициента D_1 и (б) производной dD_1/dh полиномами первой (1), второй (2) и третьей степени (3) к точным зависимостям (жирная линия).	55
3.1	Постановка задачи	70
4.1	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 1$ при разных параметрах M	93

4.2	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 2$ при разных параметрах M . . .	94
4.3	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 2,5$ при разных параметрах M . . .	94
4.4	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 2,8$ при разных параметрах M . . .	95
4.5	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 2,9$ при разных параметрах M . . .	95
4.6	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 3$ при разных параметрах M . . .	96
4.7	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 4$ при разных параметрах M . . .	96
4.8	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 для $R_2/R_1 = 5$ при разных параметрах M . . .	97
4.9	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 1$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$	99
4.10	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 1$ при $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$	99
4.11	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 1$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$	100
4.12	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 2$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$	100
4.13	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 2$ при $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$	101
4.14	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 2$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$	101

4.15	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$	102
4.16	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$	102
4.17	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$	103
4.18	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при $M = 0,005$ и $\varepsilon_0 = 0,04$	103
4.19	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,02$	104
4.20	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$	104
4.21	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$	105
4.22	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = 0,05$	105
4.23	Зависимость осредненной силы \bar{f}/ε_0^2 от среднего расстояния между пузырьками δ_0 при разных параметрах M для отношений радиусов а) $R_2/R_1 = 1$, б) $R_2/R_1 = 2$, в) $R_2/R_1 = 3$, г) $R_2/R_1 = 10$, (случай свободной границы).	106
4.24	Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 1$ при а) $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$, б) $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$ (случай свободной границы).	107

- 4.25 Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 3$ при а) $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$, б) $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$ (случай свободной границы). 107
- 4.26 Зависимость относительного расстояния между пузырьками $\delta = h/R_1$ от безразмерного времени ωt для $R_2/R_1 = 10$ при а) $M = \{0,0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,07\}$ и $\varepsilon_0 = 0,02$, б) $M = 0,02$ и $\varepsilon_0 = \{0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05\}$ (случай свободной границы). 108

Список таблиц

2.1	Аналитический вид g_X^1, g_X^2, g_X^3 для коэффициентов кинетической энергии	51
2.2	Численные значения $f_X^0, f_X^1, f_X^2, f_X^3$ для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 1$	52
2.3	Численные значения $f_X^0, f_X^1, f_X^2, f_X^3$ для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 3$	52
2.4	Численные значения $f_X^0, f_X^1, f_X^2, f_X^3$ для коэффициентов кинетической энергии при $R_2/R_1 = 10$	53