

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛОСЫ И КРУГЛОГО ПРУТА

А. Ю. ИЛЬЮШИН

(Москва)

Постановка задачи об устойчивости вязкопластического течения принадлежит А. А. Ильюшину^[1], который составил дифференциальные уравнения и граничные условия задачи определения вязкопластического плоскопараллельного течения близкого к данному и решил задачу о нахождении близких течений по отношению к плоскому равномерному деформированию полосы и плоскому же деформированию цилиндра, сделав при этом интересные выводы об устойчивости этих течений. В процессе выкладок А. А. Ильюшину удалось преодолеть большие трудности, связанные с лагранжевым методом описания движения непрерывной среды.

Ниже мы решаем задачи об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута, пользуясь иным методом, связанным с эйлеровым способом описания движения среды.

Задача о полосе является более простой, и ее решение приводится для сравнения с результатом А. А. Ильюшина. Задача о круглом пруте является пространственной задачей вязкопластического течения, и для ее решения мы привлекли уравнения пространственного деформирования непрерывной среды, полученные нами ранее.

I

1. В случае плоского течения вязкопластической среды между максимальным касательным напряжением τ_{\max} и максимальной скоростью сдвига $\dot{\gamma}_{\max}$ принимается зависимость

$$\tau_{\max} = K + \mu |\dot{\gamma}_{\max}| \quad (1.1)$$

где K — пластическая постоянная, а μ — коэффициент вязкости. Помимо этого принимается предположение о том, что главные направления тензора напряжений совпадают в каждой точке среды с главными направлениями тензора скоростей деформирования.

Если через u и v , как обычно, обозначить проекции скорости какой-либо частицы среды на оси x и y прямоугольной системы координат и через

σ_x , σ_y и τ_{xy} — компоненты тензора напряжений, то сделанные предположения немедленно приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + K \cos 2\theta + \sigma \\ \sigma_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - K \cos 2\theta + \sigma \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - K \sin \theta\end{aligned}\quad (1.2)$$

где σ — среднее арифметическое нормальных напряжений σ_x и σ_y , а θ — угол между направлением, соответствующим наибольшему главному напряжению, и осью x , причем

$$\operatorname{tg} 2\theta = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) / \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)\quad (1.3)$$

При выводе написанных соотношений принималось, что $\partial u / \partial x > 0$, т. е. элементы среды, имеющие направление, параллельное оси x , удлиняются. В противном случае, если $\partial u / \partial x < 0$, следует во всех соотношениях изменить знак, стоящий перед пластической постоянной K .

При пластическом течении объемная деформация бывает крайне незначительной, вследствие чего принимают обычно среду несжимаемой. Условие несжимаемости приводит к известному соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\quad (1.4)$$

Написанных соотношений оказывается достаточно, чтобы, используя уравнения движения непрерывной среды

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X = \rho w_x, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y = \rho w_y\quad (1.5)$$

и условия на границе в форме

$$\sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta = X_n(s), \quad \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta = Y_n(s)\quad (1.6)$$

решать задачи о плоском течении вязкопластической среды. Здесь ρ — плотность среды, X , Y — проекции массовой силы, действующей на частицу среды, w_x и w_y — проекции ускорения этой частицы, $X_n(s)$, $Y_n(s)$ — проекции сил, действующих на границе среды на элементы границы, положение которых определяется параметром s , ν — внешняя нормаль к ограничивающему среду контуру.

Заметим, что в большинстве случаев в уравнениях движения можно опускать массовые силы и инерционные члены вследствие их малости по сравнению с другими членами, входящими в те же уравнения.

2. Рассмотрим течение, определяемое законом

$$u = \omega x, \quad v = -\omega y\quad (2.1)$$

где ω — функция времени, не меняющая знака в процессе своего изменения. Для определенности будем считать, что $\omega > 0$.

Имеем для этого течения

$$\operatorname{tg} 2\theta = 0\quad (2.2)$$

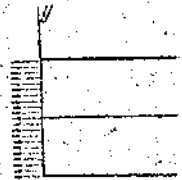
и, следовательно, $\theta = 0$. Далее, так как $\partial u / \partial x = \omega > 0$, то

$$\sigma_x = 2\mu\omega + K + \sigma, \quad \sigma_y = -2\mu\omega - K + \sigma, \quad \tau_{xy} = 0\quad (2.3)$$

Примем

Такое направление нормали перпендикулярно от усилий (фр. Если при

что соответствует лезвий осл. Останови которой близ



оси x , остаются малое Пусть в

— уравнения, b — половина будем назыв

Волмуже симметричны укладывается $= m\pi / l$, где

Если в сложной кар в виде сумм

Можно к пению с шир ляться от нему подвер $x=0$, $x=l$ и основного

¹ Но пред оси x , наприм

Примем напряжения σ_y равными нулю, тогда получим

$$\sigma = 2\mu\omega + K, \quad \sigma_x = 2K + 4\mu\omega \quad (2.4)$$

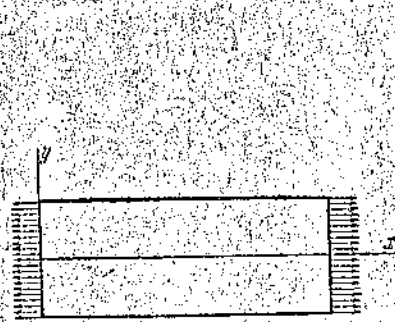
Такое напряженное состояние соответствует растяжению прямоугольной полосы нормальными силами, равномерно распределенными по краям полосы, перпендикулярным к оси x . Края полосы, параллельные оси x , свободны от усилий (фиг. 1).

Если принять $\sigma_x = 0$, то

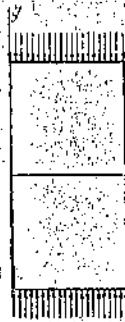
$$\sigma = -(2\mu\omega + K), \quad \sigma_y = -(2K + 4\mu\omega) \quad (2.5)$$

что соответствует сжатию полосы силами, действующими на край, параллельный оси x , причем силы нормальны к этому краю (фиг. 2).

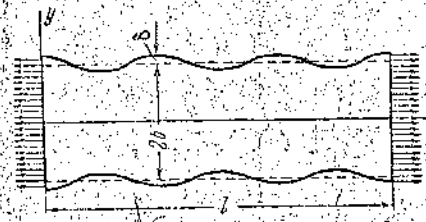
Остановимся на первом случае и исследуем течение полосы, очертание которой близко к прямоугольному. Пусть края полосы, перпендикулярные



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

оси x , остаются прямолинейными, края же, параллельные этой оси, претерпевают малое «возмущение» и становятся криволинейными (фиг. 3).

Пусть в некоторый момент времени

$$y = b + \delta \cos ax, \quad y = -b - \delta \cos ax \quad (2.6)$$

— уравнения, которыми определяются криволинейные границы полосы, где b — половина ширины исходной прямолинейной полосы, течение которой будем называть основным или «невозмущенным».

Возмущение границы имеет, таким образом, синусоидальный характер¹, симметричный относительно оси x . Будем считать, что по длине полосы укладывается целое число полуволи возмущения, для чего положим $a = m\pi/l$, где m — целое число.

Если возмущение краев полосы, параллельных оси x , носит более сложный характер, то его нетрудно представить, пользуясь рядами Фурье, в виде суммы простых синусоидальных возмущений.

Можно предположить, что при малой амплитуде возмущения δ по сравнению с шириной полосы $2b$ течение возмущенной полосы будет мало отличаться от соответствующего невозмущенного течения, если полоса попеременно подвергается действию нормальных усилий, распределенных по торцам $x=0$, $x=l$. На этом основании разности между скоростями возмущенного и основного движений следует считать малыми величинами по сравнению

¹ По аналогии с трудом рассмотрим возмущение, антисимметричное относительно оси x , например, течение полосы в границах $y = b + \delta \cos ax$ и $y = -b + \delta \cos ax$.

со скоростями основного движения. Обозначим эти разности через u и v , причем

$$u = u' - u^0, \quad v = v' - v^0 \quad (2.7)$$

где u' и v' — проекции скорости частицы в возмущенном движении, а $u^0 = \omega x$ и $v^0 = -\omega y$ — проекции скорости в основном движении.

Нетрудно видеть, что угол наклона оси x к направлению наибольшего главного напряжения будет малой величиной. Действительно, согласно (1.3)

$$\operatorname{tg} 2\theta' = -\frac{\partial v' / \partial x + \partial u' / \partial y}{\partial u' / \partial x - \partial v' / \partial y} = -\frac{\partial v / \partial x + \partial u / \partial y}{2\omega + \partial u / \partial x - \partial v / \partial y} \approx -\frac{1}{2\omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

так как выражение $\partial u / \partial x - \partial v / \partial y$ принимаем малым по сравнению с 2ω . Таким образом

$$\theta' \approx -\frac{1}{4\omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

Для компонентов тензора напряжений возмущенного движения (1.2) получим выражения

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x} + K \cos 2\theta' + \sigma' \approx 2\mu\omega + K + \sigma^0 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma = \sigma_x^0 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \\ \sigma_y' &= 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} - K \cos 2\theta' + \sigma' \approx -2\mu\omega - K + \sigma^0 + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma \\ \tau_{xy}' &= \mu \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - K \sin 2\theta' \approx \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2K\theta' \end{aligned} \quad (2.10)$$

так как вследствие малости угла θ' можно принять

$$\cos 2\theta' \approx 1, \quad \sin 2\theta' \approx 2\theta' \quad (2.11)$$

Величина σ представляет разность между средними арифметическими главными напряжениями возмущенного и основного течений.

Так как скорости u^0 и v^0 основного течения удовлетворяют уравнению несжимаемости, то для возмущенного движения имеем

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

Последнее уравнение указывает на существование для рассматриваемого момента времени такой функции $\psi(x, y)$, для которой имеют место соотношения

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.13)$$

Используя эти соотношения, получим для угла θ' из (2.9) выражение

$$\theta' = -\frac{1}{4\omega} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (2.14)$$

а для компонентов тензора напряжений возмущенного движения (2.10) выражения

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \sigma_x^0 - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \sigma, & \sigma_y' &= 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \sigma \\ \tau_{xy}' &= \mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{2K}{4\omega} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\sigma_x^0}{4\omega} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Граничные условия (1.6) на криволинейных краях возмущенной полосы могут быть записаны в виде

$$\sigma_x' \cos \alpha + \tau_{xy}' \cos \beta = 0, \quad \tau_{xy}' \cos \alpha + \sigma_y' \cos \beta = 0 \quad (2.16)$$

Здесь

где α — угл

и вследствие

то

cos α Замеча
а τ_{xy}' и σ_y'
малыми поЭти ос
так как г
то с точно
рения на
брать велПодста
ного течен
компонентдля опре
уравнени
водную фсодержани
надлежит

его можн

В пр
соответс
жидкости

и медлен

Пос

3. Приня

Здесь

$$\cos xy = \cos \left(x\tau + \frac{1}{2} \pi \right) = -\sin x\tau \quad (2.17)$$

где $x\tau$ — угол между касательной к границе полосы с осью x . Так как

$$\operatorname{tg} x\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (b + \delta \cos ax) = -a\delta \sin ax \quad (2.18)$$

и вследствие малости величины δ имеет место

$$\sin x\tau \approx x\tau = \operatorname{tg} x\tau \quad (2.19)$$

то

$$\cos xy \approx a\delta \cos ax, \quad \cos yv = \sin xv = \sin \left(\frac{1}{2} \pi + x\tau \right) = \cos x\tau \approx 1 \quad (2.20)$$

Заметим, кроме того, что σ_x^0 отличается на малую величину от σ_x^0 , а τ_{xy}^0 и σ_y^0 сами представляют собой малые величины, поэтому, пренебрегая малыми порядками выше первого, условия на границе в виде

$$\sigma_x^0 a\delta \sin ax + \tau_{xy}^0 = 0, \quad \sigma_y^0 = 0 \quad (2.21)$$

Эти соотношения должны иметь место на самой границе полосы. Но так как граница представляет малое возмущение прямых $y=b$ и $y=-b$, то с точностью до малых порядка выше первого можно требовать удовлетворения написанных выше соотношений на этих прямых и, следовательно, брать величины τ_{xy}^0 и σ_y^0 при значении координаты y , равной $\pm b$.

Подставляя выражения (2.15) компонент тензора напряжений возмущенного течения в уравнения движения (1.5) и опуская в этих уравнениях компоненты массовых сил и инерционные члены, получим два уравнения:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\sigma_x^0}{4\omega} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\sigma_y^0}{4\omega} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) = 0$$

для определения двух неизвестных функций σ и ϕ . Дифференцируя первое уравнение по переменной y , а второе по x и исключая смешанную производную функции σ , приходим к уравнению

$$\frac{\sigma_x^0}{4\omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\sigma_x^0}{4\omega} - 2\mu \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\sigma_y^0}{4\omega} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.23)$$

содержащему одну неизвестную функцию ψ . Уравнение для функции ϕ принадлежит к эллиптическому типу, так как, замечая, что

$$\frac{\sigma_x^0}{4\omega} = \frac{2K + 4\mu\omega}{4\omega} = \frac{K}{2\omega} + \mu \quad (2.24)$$

его можно представить в виде

$$\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi + \frac{K}{2\omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = 0 \quad (2.25)$$

В предельных случаях, при $K=0$ и при $\mu=0$, уравнение обращается соответственно в уравнения функции тока медленного движения вязкой жидкости

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.26)$$

и медленного течения идеально пластического вещества

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = 0 \quad (2.27)$$

Последнее уравнение уже имеет гиперболический характер.

Если ввести обозначение

$$v = -1 + \frac{8\mu\omega}{\sigma_{z^0}} = \frac{4\mu\omega - 2K}{4\mu\omega + 2K} \quad (2.28)$$

то уравнение функции тока может быть записано в виде

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2v \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.29)$$

причем так как, согласно предположению, $\omega > 0$, то

$$-1 < v < +1 \quad (2.30)$$

Предельного значения $+1$ коэффициент v достигает при бесконечно большой скорости деформирования, а значения -1 при скорости деформирования, равной нулю. При этих предельных значениях v вязкопластическое вещество описывается соответственно уравнениями пуазелевого движения вязкой жидкости и уравнениями идеально пластического вещества.

Частное решение уравнения для функции тока ψ будем искать, соблюдаясь с граничными условиями в виде

$$\psi = \sin ax \varphi(ay) \quad (2.31)$$

где параметр $a = m\pi/L_1$ меняется с течением времени обратно пропорционально длине полосы.

Производя очевидные сокращения и вводя новую переменную

$$t = ay \quad (2.32)$$

получим для функции $\psi(ay) = \varphi(t)$ уравнение

$$\varphi^{IV}(t) - 2v\varphi''(t) + \varphi(t) = 0 \quad (2.33)$$

которое может быть записано с помощью произведения двух коммутативных дифференциальных операторов в форме

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \bar{\gamma}^2\right) \varphi = 0 \quad (2.34)$$

где γ и $\bar{\gamma}$ — два сопряженных комплексных числа:

$$\gamma = \alpha + \beta i, \quad \bar{\gamma} = \alpha - \beta i, \quad \text{причем} \quad \alpha = \sqrt{\frac{1-v}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1+v}{2}} \quad (2.35)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\gamma\bar{\gamma} = \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \gamma^2 + \bar{\gamma}^2 = 2(\alpha^2 - \beta^2) = -2v \quad (2.36)$$

и проверить тем самым справедливость такой записи уравнения. Решение этого уравнения состоит из произвольной линейной комбинации $\cos \gamma z$, $\sin \gamma z$ и $\sin \bar{\gamma} z$. В симметричных точках относительно оси x проекции скоростей на ось y должны иметь противоположные знаки, т. е. $v(x, -y) = -v(x, y)$, а так как $v = \partial\psi/\partial x = a \cos ax \varphi(ay)$, согласно (2.29), то функция $\varphi(ay)$ должна быть нечетной. Таким образом решение уравнения для функции $\varphi(t)$ следует взять в виде

$$\varphi(t) = C \sin \gamma t + \bar{C} \sin \bar{\gamma} t \quad (2.37)$$

При таком выборе вида решения функция $\varphi(t)$ принимает вещественные значения и зависит от двух произвольных постоянных¹, входящих в состав сопряженных комплексных констант C и \bar{C} .

¹ Следует иметь в виду, что задача решается для фиксированного момента времени. В противном случае надлежало бы считать величины C и \bar{C} функциями времени.

Эти к
порядке
3. Д
последов
согласно
диаметра γ

имеем
 $\frac{\partial \psi}{\partial x}$
 $\frac{\partial \psi}{\partial y}$
Инте

где $f(y)$ —
Поле

Сумм
Таким о
обознач
Для
сумм име

$\sigma_y' =$

Обо
 $y = b$.
обратит
должно

так как
ная A Γ

Пор
чаем со

Таб

Сле

Эти константы надлежит в дальнейшем определить так, чтобы удовлетворялись граничные условия задачи.

3. Для отыскания среднего арифметического главных напряжений σ воспользуемся уравнениями (2.22). Подставив в эти уравнения функцию ϕ согласно (2.31) и (2.32) и учитывая, что из формулы (2.28) для коэффициента ν следует

$$\sigma_x^0 = \frac{8\mu\nu}{1+\nu}, \quad 2\mu - \frac{\sigma_m^0}{4\omega} = \frac{2\nu\gamma}{1+\nu} \quad (3.1)$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \left(2\mu - \frac{\sigma_m^0}{4\omega}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\sigma_m^0}{4\omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{2\mu a^2}{1+\nu} [\varphi'''(t) - \nu \varphi'(t)] \sin ax \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= -\left(2\mu - \frac{\sigma_m^0}{4\omega}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\sigma_m^0}{4\omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{2\mu a^2}{1+\nu} [\nu \varphi''(t) - \varphi(t)] \cos ax \end{aligned} \quad (3.2)$$

Интегрируя выражения для производной от σ по x , получаем

$$\sigma = -\frac{2\mu a^2}{1+\nu} [\varphi''(t) - \nu \varphi'(t)] \cos ax + f(y) \quad (3.3)$$

где $f(y)$ — произвольная функция от переменной y .

Подставляя выражение для σ во второе уравнение (3.2), получим

$$\frac{2\mu a^2}{1+\nu} [\varphi^{IV}(t) - 2\nu \varphi'''(t) + \varphi(t)] \cos ax - f'(y) = 0 \quad (3.4)$$

Сумма, стоящая в квадратных скобках, согласно (2.33), равна нулю. Таким образом функция $f(y)$ сводится к некоторой постоянной, которую обозначим через A .

Для компонент тензора напряжений возмущенного движения σ_y' и τ_{xy}' имеем выражения

$$\begin{aligned} \sigma_y' &= 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \sigma = 2\mu a^2 \cos ax \varphi'(t) - \frac{2\mu a^2}{1+\nu} [\varphi''(t) - \nu \varphi'(t)] \cos ax + A = \\ &= -\frac{2\mu a^2}{1+\nu} [\varphi''(t) - (1+2\nu)\varphi'(t)] \cos ax + A \\ \tau_{xy}' &= \frac{\sigma_x^0}{4\omega} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = -\frac{2\mu a^2}{1+\nu} [\varphi''(t) + \varphi(t)] \sin ax \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим через $h = ab$ значение t , соответствующее границе полосы $y = b$. Тогда согласно граничным условиям напряжение σ_y' должно обратиться в нуль при $t = \pm h$ и, следовательно, при любом значении x должно иметь место

$$-2\mu \frac{a^2}{1+\nu} [\varphi'''(h) - (1+2\nu)\varphi'(h)] \cos ax + A = 0 \quad (3.6)$$

так как $\varphi'(t)$ и $\varphi''(t)$ — четные функции. Отсюда заключаем, что постоянная A равна нулю и

$$\varphi'''(h) - (1+2\nu)\varphi'(h) = 0 \quad (3.7)$$

Подставляя в это равенство выражение (2.33) для функции $\varphi(t)$, получаем соотношение

$$\gamma(\gamma^2 + 1 + 2\nu) C \cos \gamma h + \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 + 1 + 2\nu) \bar{C} \cos \bar{\gamma} h = 0 \quad (3.8)$$

Так как $2\nu = -(\gamma^2 + \bar{\gamma}^2)$ и $\gamma\bar{\gamma} = 1$, то

$$\gamma(\gamma^2 + 1 + 2\nu) = \gamma(1 - \bar{\gamma}^2) = \gamma - \bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 + 1 + 2\nu) = \bar{\gamma} - \gamma \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$C \cos \gamma h - \bar{C} \cos \bar{\gamma} h = 0 \quad (3.10)$$

Поэтому $C = D \cos \bar{\gamma}h$ и $\bar{C} = D \cos \gamma h$ и, следовательно,

$$\varphi = D (\cos \bar{\gamma}h \sin \gamma t + \cos \gamma h \sin \bar{\gamma}t) \quad (3.11)$$

где D — новая постоянная, имеющая вещественное значение.

Для отыскания этой постоянной воспользуемся первым граничным условием (2.21), на которого, подставив выражение (3.1) для σ_x^0 и (3.5) для τ_{xy} , а затем заменив функцию $\varphi(t)$ ее выражением (3.11), получим

$$4\omega\delta - aD [(1 - \gamma^2) \cos \bar{\gamma}h \sin \gamma h + (1 - \bar{\gamma}^2) \cos \gamma h \sin \bar{\gamma}h] = 0 \quad (3.12)$$

Откуда

$$D = \frac{2\omega\delta}{\beta (\beta \sin 2\alpha h + \alpha \operatorname{sh} 2\beta h)} \quad (3.13)$$

причем в последних преобразованиях мы воспользовались соотношениями

$$1 - \gamma^2 = 1 - \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta i = 2\beta^2 - 2\alpha\beta i, \quad 1 - \bar{\gamma}^2 = 2\beta^2 + 2\alpha\beta i \quad (3.14)$$

$$\sin (\gamma + \bar{\gamma})h = \sin 2\alpha h, \quad \sin (\gamma - \bar{\gamma})h = \sin i2\beta h = i \operatorname{sh} 2\beta h \quad (3.15)$$

Сумма, стоящая в скобках знаменателя выражения (3.12), положительна при всех значениях h . Постоянная D , таким образом, всегда ограничена и обращается в нуль, если амплитуда возмущения границы полосы δ равна нулю. Таким образом полоса без возмущений не может получить их в процессе деформирования.

На торцах полосы касательное напряжение исчезает, так как

$$\sin a l = \sin m\pi = 0 \quad (3.16)$$

Нормальное напряжение σ_x' на торцах отличается от соответствующего напряжения σ_x^0 для невозмущенной полосы на малую величину. Из (2.15), подставив (3.1), (2.31) и (3.3), имеем

$$\sigma_x' = \frac{8\mu\omega}{1+\nu} - 2\mu a^2 \varphi'(t) \cos at - \frac{2\mu a^2}{1+\nu} [\varphi'''(t) - \nu \varphi'(t)] \cos ax \quad (3.17)$$

Равнодействующая всех нормальных усилий на торце, как и следовало ожидать, остается с точностью до малых второго порядка без изменения. Действительно, величина этой равнодействующей определяется интегралом

$$P = \int_{-b-\delta}^{b+\delta} \sigma_x' dy = 2(b+\delta) \frac{8\mu\omega}{1+\nu} - \frac{2\mu a^2}{1+\nu} \int_{-b-\delta}^{b+\delta} [\varphi'''(ay) + \varphi'(ay)] dy \quad (3.18)$$

Последний интеграл вследствие малости подинтегрального выражения и величины возмущения полосы на торце может быть взят в пределах от $-b$ до $+b$ или, если проанализировать интегрирование по промежуточной $t = ay$, в пределах от $-h$ до $+h$. Имеем

$$P = 2(b+\delta) \frac{8\mu\omega}{1+\nu} - \frac{4\mu a^2}{1+\nu} D [(1 - \gamma^2) \cos \bar{\gamma}h \sin \gamma h + (1 - \bar{\gamma}^2) \cos \gamma h \sin \bar{\gamma}h] \quad (3.19)$$

если заменить функцию φ ее выражением (3.11). Выражение, стоящее в скобках, умноженное на aD согласно (3.12), равно $4\omega\delta$. Таким образом, произведя сокращение, получаем

$$P = 2b \frac{8\mu\omega}{1+\nu} = 2b\delta_x^0 \quad (3.20)$$

т. е. величину равнодействующей усилий на торце невозмущенной полосы. То же имеет место, разумеется, для любого сечения полосы.

4. Рассмотрим какую-либо точку границы с абсциссой x . Возмущение границы в этом месте составляет величину

$$\eta = \delta \cos ax \quad (4.1)$$

Вертикальная составляющая v возмущения скорости основного течения имеет согласно (2.13), (2.20), (3.11) и (3.15)

$$v = aD \cos ax [\cos \gamma h \sin \gamma h + \cos \gamma h \sin \gamma h] = aD \sin 2ah \cos ax \quad (4.2)$$

Возмущение будет иметь тенденцию расти, если эта составляющая имеет тот же знак, что и возмущение η , и наоборот, если знаки разные, убывать, т. е. если соответственно

$$\frac{v}{\eta} = \frac{aD}{\delta} \sin 2ah > 0 \text{ или } \frac{v}{\eta} < 0 \quad (4.3)$$

В первом случае возмущенное движение можно назвать, следуя А. А. Ильюшину, неустойчивым, во втором случае устойчивым.

Так как $ah = ab \sqrt{(1-\nu)/2}$, то, вспоминая (2.35) и (2.28), условие неустойчивости может быть представлено в форме

$$2n\pi < 2ah = 2 \frac{m\pi}{l} b \sqrt{\frac{K}{K+2\mu\nu}} < (2n+1)\pi \quad (4.4)$$

где n — целое число.

В процессе деформирования длина полосы l увеличивается, а ширина b убывает, поэтому одно и то же возмущение переходит из состояния неустойчивости в состояние устойчивости, пока, наконец, величина $2ah$ не становится меньше π , после чего возмущение становится все время неустойчивым и полоса должна разорваться.

При сжатии полосы имеет место обратная картина, и возмущения устойчивые при растяжении будут неустойчивыми.

II

5. Переходя к решению задачи об устойчивости вязкопластического течения цилиндра, остановимся прежде всего на выводе уравнений пространственного течения вязкопластической среды. Выделим элемент среды в форме малого параллелепипеда, ребра которого ориентированы по главным направлениям тензора напряжений. Примем в качестве первой гипотезы о поведении среды, что главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями тензора скоростей деформирования в каждой точке среды. Пусть ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 — главные скорости деформирования элемента среды и

$$\theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (5.1)$$

относительная скорость изменения его объема. Величины

$$\gamma_1 = \epsilon_1 - \frac{1}{3}\theta, \quad \gamma_2 = \epsilon_2 - \frac{1}{3}\theta, \quad \gamma_3 = \epsilon_3 - \frac{1}{3}\theta \quad (5.2)$$

назовем скоростями формоизменения элемента среды.

Рассмотрим бесконечно малую возможную деформацию среды. Величины относительных удлинений ребер элемента представим в виде $c\delta\epsilon_1$, $c\delta\epsilon_2$ и $c\delta\epsilon_3$, где $\delta\epsilon_1$, $\delta\epsilon_2$ и $\delta\epsilon_3$ — значения вариаций главных скоростей деформирования и c — произвольный малый множитель. Величины

$$\delta q_1 = c(\delta\epsilon_1 - \frac{1}{3}\delta\theta), \quad \delta q_2 = c(\delta\epsilon_2 - \frac{1}{3}\delta\theta) \quad \text{и} \quad \delta q_3 = c(\delta\epsilon_3 - \frac{1}{3}\delta\theta) \quad (5.3)$$

представляют собой компоненты возможного формоизменения среды, а

$$\delta w = c \delta \theta = c (\delta \varepsilon_1 + \delta \varepsilon_2 + \delta \varepsilon_3) \quad (5.4)$$

величину возможного относительного изменения объема.

Примем компоненты формоизменения q_1 , q_2 и q_3 и относительное изменение объема w за обобщенные квазикоординаты деформирования элемента среды и отнесем к ним соответствующие обобщенные силы S_1 , S_2 , S_3 и σ . На основании выражения удельной работы сил, приложенных к элементу, можно записать равенство

$$\sigma_1 c \delta q_1 + \sigma_2 c \delta q_2 + \sigma_3 c \delta q_3 = S_1 \delta q_1 + S_2 \delta q_2 + S_3 \delta q_3 + \sigma \delta w \quad (5.5)$$

где σ_1 , σ_2 и σ_3 — главные напряжения на гранях элемента. Отсюда, заменяя δq_1 , δq_2 , δq_3 и δw их выражениями (5.3) и (5.4) и сравнивая коэффициенты в правой и левой части равенства при удлинении ребер элемента, получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{3} S_1 - \frac{1}{3} S_2 - \frac{1}{3} S_3 + \sigma = S_1 - \Gamma + \sigma \\ \sigma_2 &= \frac{2}{3} S_2 - \frac{1}{3} S_1 - \frac{1}{3} S_3 + \sigma = S_2 - \Gamma + \sigma \\ \sigma_3 &= \frac{2}{3} S_3 - \frac{1}{3} S_1 - \frac{1}{3} S_2 + \sigma = S_3 - \Gamma + \sigma \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + S_3) \quad (5.7)$$

Так как

$$\delta q_1 + \delta q_2 + \delta q_3 = 0 \quad (5.8)$$

то вариации формоизменения зависят между собой. Вследствие этого соответствующие им обобщенные силы S_1 , S_2 и S_3 могут быть определены из вышенаписанных соотношений лишь с точностью до неизвестного слагаемого Γ .

Складывая соотношения (5.6), получаем

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma \quad (5.9)$$

Таким образом σ оказывается средним арифметическим нормальных напряжений, действующих по трем взаимноперпендикулярным площадкам.

Величины S_1 , S_2 и S_3 назовем напряжениями формоизменения.

В качестве второй гипотезы о поведении упруговязкой среды примем, что скорость формоизменения $\dot{\gamma}$ связана с соответствующим ей напряжением формоизменения S законом

$$\begin{aligned} S &= K + \mu \dot{\gamma}, & \text{если } \dot{\gamma} > 0 \\ -K &\leq S \leq K, & \text{если } \dot{\gamma} = 0 \\ S &= -K + \mu \dot{\gamma}, & \text{если } \dot{\gamma} < 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

где K — пластическая постоянная и μ — коэффициент вязкости данной среды (фиг. 4). Наконец, примем среду несжимаемой, т. е. положим $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. Вследствие несжимаемости имеет место

$$\dot{\gamma}_1 = \dot{\varepsilon}_1, \quad \dot{\gamma}_2 = \dot{\varepsilon}_2, \quad \dot{\gamma}_3 = \dot{\varepsilon}_3 \quad (5.11)$$

Пусть ни одна из величин $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$, $\dot{\gamma}_3$ не обращается в нуль. Тогда одна из них имеет знак, противоположный знаку двух других, и модуль, равный

их суммарного, названного определением $\dot{\gamma}$, т. е. $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3$.

после чего $\sigma_1 = K + \mu \dot{\gamma}_1$.

Так как

то получаем

Если перед началом деформации $\sigma_1 = K + \mu \dot{\gamma}_1$. Написав уравнение равновесия, получим

Действительный и мнимый части уравнения в комплексных координатах $\sigma_1 = K + \mu \dot{\gamma}_1$.

Заметим, что $\sigma_1 = K + \mu \dot{\gamma}_1$.

Далее $\sigma_1 = K + \mu \dot{\gamma}_1$.

т. е. закон торома $\sigma_1 = K + \mu \dot{\gamma}_1$. Напряжения действительные $\sigma_1 = K + \mu \dot{\gamma}_1$.

В это выражение $\sigma_1 = K + \mu \dot{\gamma}_1$. Рассматривая силы, равные по модулю и противоположные по направлению.

где ε_x , ε_y — компоненты деформации, совпадающей с направлением деформации.

их сумме. Направление, соответствующее такой компоненте формоизменения, назовем главным направлением вязкопластического течения. Для определенности будем считать главным направлением, соответствующее компоненте γ_1 , и, кроме того, будем считать, что $\gamma_1 > 0$. Тогда γ_2 и γ_3 отрицательны и, следовательно, имеем

$$S_1 = K + \mu\gamma_1, \quad S_2 = -K + \mu\gamma_2, \quad S_3 = -K + \mu\gamma_3 \quad (5.12)$$

после чего выражения для главных напряжений принимают вид:

$$\sigma_1 = K + \mu\epsilon_1 - \Gamma + \sigma, \quad \sigma_2 = -K + \mu\epsilon_2 - \Gamma + \sigma, \quad \sigma_3 = -K + \mu\epsilon_3 - \Gamma + \sigma \quad (5.13)$$

Так как

$$\Gamma = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3) = -\frac{1}{3}K \quad (5.14)$$

то получаем окончательно для несжимаемой среды

$$\sigma_1 = \sigma + \frac{1}{3}K + \mu\epsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma - \frac{2}{3}K + \mu\epsilon_2, \quad \sigma_3 = \sigma - \frac{1}{3}K + \mu\epsilon_3 \quad (5.15)$$

Если $\gamma_1 < 0$, то в этих соотношениях следует изменить знак, стоящий перед пластической постоянной K .

Написанные соотношения справедливы для главных осей тензора напряжений.

Действуя согласно правилам преобразования компонент тензора напряжений и тензора скоростей деформирования, можно записать закон пространственного деформирования упруговязкой среды в произвольной системе координат и получить полную систему уравнений для решения задач пространственного течения.

Заметим, что в случае плоскопараллельного течения, приняв $\epsilon_3 = 0$, получим, если $\gamma_1 > 0$

$$S_1 = K + \mu\gamma_1 = K + \mu\epsilon_1, \quad S_2 = -K + \mu\gamma_2 = -K + \mu\epsilon_2, \quad -K \leq S_3 \leq +K \quad (5.16)$$

Далее, по (5.6) имеем

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2K + \mu(\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = K + \frac{1}{2}\mu\gamma_{\max} \quad (5.17)$$

т. е. закон, принятый выше для плоского деформирования полосы, в котором коэффициент вязкости μ заменен вдвое большим коэффициентом. Напряжение σ_2 остается при плоской деформации неопределенным. Действительно, так как по (5.16) $S_1 + S_2 = 0$, то согласно (5.6) имеем $\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) = -\Gamma + \sigma$ и, следовательно,

$$\sigma_3 = S_3 - \Gamma + \sigma = S_3 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5.18)$$

В этом выражении величина S_3 может иметь любое значение, не превышающее по модулю пластической постоянной K .

Рассмотрим растяжение круглого цилиндра под действием нормальных сил, равномерно распределенных по его торцам. В силу симметрии и однородности деформирования следует считать

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{1}{2}\epsilon_z < 0 \quad (5.19)$$

где ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z — скорости деформирования в системе координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра. Таким образом ось z определяет главное направление течения, и в цилиндрических координатах закон связи компо-

тензор напряжений и тензор скоростей деформирования запишется в виде

$$\sigma_z = \sigma + \frac{1}{3} K + \mu \varepsilon_z, \quad \sigma_r = \sigma - \frac{2}{3} K + \mu \varepsilon_r, \quad \sigma_\theta = \sigma - \frac{2}{3} K + \mu \varepsilon_\theta \quad (5.20)$$

Так как боковая поверхность цилиндра свободна от усилий и напряженное состояние однородно, то следует положить

$$\sigma_r = 0 \quad (5.21)$$

Тогда согласно (5.19) в цилиндрических координатах $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2} \varepsilon_z$ и, следовательно, имеем

$$\sigma_\theta = 0, \quad \sigma = \frac{2}{3} K + \frac{1}{3} \mu \varepsilon_z, \quad \sigma_z = 2K + \frac{2}{3} \mu \varepsilon_z \quad (5.22)$$

Если через v_z , v_r и v_θ обозначить проекции скорости какой-либо частицы цилиндра с координатами z , r , θ на оси цилиндрических координат, то при растяжении цилиндра следует положить проекцию v_θ , равной нулю. На основании известных формул имеем в этом случае

$$\varepsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{v_r}{r} \quad (5.23)$$

При растяжении скорость деформирования ε_z положительна. Обозначая ее через ω , замечаем, что течение, определяемое законом

$$v_z = \omega z, \quad v_r = -\frac{1}{2} \omega r, \quad v_\theta = 0 \quad (5.24)$$

где $\omega > 0$ имеет требуемые скорости деформирования. Течение, определяемое этим законом, назовем невозмущенным или основным течением.

6. Исследуем течение тела, ограниченного поверхностью вращения, близкой к поверхности кругового цилиндра. Пусть в некоторый момент времени уравнение образующей этой поверхности в цилиндрических координатах имеет вид:

$$r_0 = R + \delta \cos az \quad (6.1)$$

где R — радиус исходного цилиндра, δ — малая величина, представляющая амплитуду «возмущения» поверхности цилиндра, и a — величина, характеризующая длину волны возмущения. Мы примем, что на длине цилиндра l укладывается целое число m полуволн возмущения поверхности и, следовательно,

$$a = \frac{m\pi}{l} \quad (6.2)$$

Комбинируя элементарные возмущения с разными амплитудами и разным числом полуволн m , укладываемых по длине цилиндра, можно получить возмущенную поверхность достаточно произвольного вида.

Вследствие малости элементарного возмущения следует ожидать, что течение тела с возмущенной границей будет мало отличаться от течения цилиндра, если сохранить растягивающие нормальные усилия, действующие по торцам.

Можно поэтому считать, что главное направление течения в возмущенном движении будет лежать в меридиальной плоскости (фиг. 5) и образо-

вывать м
в какой-т
значения
главное в
направлен
ридинально
ридинально
Соглас
пряжений
соотношен

$\sigma'_z = \frac{1}{3}$
 $\sigma'_r = \frac{2}{3}$
 $\sigma'_{rz} = -$
 $\varepsilon'_z = \frac{1}{3}$
 $\varepsilon'_r = \frac{2}{3}$
 $\gamma'_{rz} =$
Кром

Так к
то согласи

σ'_z

Подст
напряжен
ностей де

σ'_z

и, кроме

Для

Испом

$\sigma'_z = \sigma^0$

$\sigma'_r = \sigma^0$

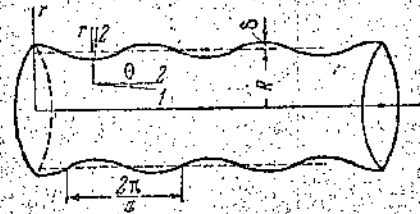
где $\sigma = \sigma^0$

Ввод
движений

вывать малый угол θ с осью z . Пусть $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ — главные напряжения в какой-либо точке сечения тела с возмущенной границей и $\varepsilon_1', \varepsilon_2'$ и ε_3' — значения главных скоростей деформирования в той же точке. За первое главное направление примем главное направление течения, за второе — направление, перпендикулярное к первому и лежащее, как и первое, в меридиальной плоскости; третьим направлением будет служить нормаль к меридиальной плоскости.

Согласно известным формулам преобразования компонент тензора напряжений и компонент тензора скоростей деформирования получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_2' &= \frac{1}{2}(\sigma_1' + \sigma_3') + \frac{1}{2}(\sigma_1' - \sigma_3') \cos 2\theta \\ \sigma_r' &= \frac{1}{2}(\sigma_1' + \sigma_2') - \frac{1}{2}(\sigma_1' - \sigma_2') \cos 2\theta, \\ \tau_{rz}' &= -\frac{1}{2}(\sigma_1' - \sigma_2') \sin 2\theta \end{aligned} \quad (6.3)$$



Фиг. 5.

$$\begin{aligned} \varepsilon_2' &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1' + \varepsilon_3') + \frac{1}{2}(\varepsilon_1' - \varepsilon_3') \cos 2\theta \\ \varepsilon_r' &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1' + \varepsilon_2') - \frac{1}{2}(\varepsilon_1' - \varepsilon_2') \cos 2\theta \\ \gamma_{rz}' &= -(\varepsilon_1' - \varepsilon_2') \sin 2\theta \end{aligned}$$

Кроме того, конечно,

$$\sigma_0 = \sigma_3 \quad (6.4)$$

Так как первое направление является главным направлением течения, то согласно закону деформирования вязкопластической среды полагаем

$$\sigma_1' = \sigma + \frac{1}{3}K + \mu\varepsilon_1', \quad \sigma_2' = \sigma - \frac{2}{3}K + \mu\varepsilon_2', \quad \sigma_3' = \sigma - \frac{2}{3}K + \mu\varepsilon_3' \quad (6.5)$$

Подставляя значения σ_1' и σ_3' в формулы (6.3) для компонент тензора напряжений и пользуясь теми же формулами (6.3) для компонент скоростей деформирования ε_r' , ε_r' и γ_{rz}' , получим

$$\begin{aligned} \sigma_2' &= \sigma + \frac{1}{3}K + K \cos 2\theta + \mu\varepsilon_2', \quad \sigma_r' = \sigma + \frac{1}{3}K - K \cos 2\theta + \mu\varepsilon_r', \\ \tau_{rz}' &= -K \sin 2\theta + \frac{1}{2}\mu\gamma_{rz}' \end{aligned} \quad (6.6)$$

и, кроме того,

$$\sigma_0' = \sigma - \frac{2}{3}K + \mu\varepsilon_0' \quad (6.7)$$

Для основного течения имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_1^0 &= \sigma^0 + \frac{1}{3}K + \mu\varepsilon_1^0, & \sigma_r^0 &= \sigma^0 - \frac{2}{3}K + \mu\varepsilon_r^0 = 0, \\ \tau_{rz}^0 &= 0, & \sigma_0^0 &= \sigma^0 - \frac{2}{3}K + \mu\varepsilon_0^0 = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Используя эти соотношения, можно написать выражения

$$\begin{aligned} \sigma_2' &= \sigma^0 + \sigma - K(1 - \cos 2\theta) + \mu(\varepsilon_2' - \varepsilon_2^0), & \tau_{rz}' &= -K \sin 2\theta + \frac{1}{2}\mu\gamma_{rz}' \\ \sigma_r' &= \sigma + K(1 - \cos 2\theta) + \mu(\varepsilon_r' - \varepsilon_r^0), & \sigma_0' &= \sigma + \mu(\varepsilon_0' - \varepsilon_0^0) \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $\sigma = \sigma' - \sigma^0$ — возмущение давления.

Вводя для разности проекций скоростей возмущенного и основного движений обозначения

$$v_z = v_z' - v_z^0, \quad v_r = v_r' - v_r^0 \quad (6.10)$$

получим, что

$$\begin{aligned}\epsilon_z' - \epsilon_z^0 &= \frac{\partial v_z'}{\partial z} - \frac{\partial v_z^0}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \epsilon_r' - \epsilon_r^0 &= \frac{\partial v_r'}{\partial r} - \frac{\partial v_r^0}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta' - \epsilon_\theta^0 &= \frac{v_r'}{r} - \frac{v_r^0}{r} = \frac{v_r}{r}\end{aligned}\quad (6.11)$$

и, кроме того,

$$\gamma_{rz}' = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (6.12)$$

Полагая $\cos 2\theta \approx 1$ и $\sin 2\theta \approx 2\theta$ вследствие малости угла θ и принимая во внимание формулы (6.11) и (6.12), получим из (6.9)

$$\begin{aligned}\sigma_z' &= \sigma_z^0 + \sigma + \mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \tau_{rz}' &= -2K\theta + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \sigma_r' &= \sigma + \mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \sigma_\theta' &= \sigma + \mu \frac{v_r}{r}\end{aligned}\quad (6.13)$$

Для определения угла θ следует воспользоваться известной формулой

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{\gamma_{rz}'}{\epsilon_z' - \epsilon_r'} = -\left\{ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\} : \left\{ \left(\epsilon_z^0 + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \left(\epsilon_r^0 + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right\} \quad (6.14)$$

Так как величины $\partial v_z / \partial z$ и $\partial v_r / \partial r$, представляющие собой возмущения скоростей деформирования, малы по сравнению со скоростями деформирования основного течения $\epsilon_z^0 = \omega$ и $\epsilon_r^0 = -\frac{1}{2}\omega$, то с точностью до малых второго порядка имеем

$$2\theta = -\frac{2}{3\omega} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (6.15)$$

Таким образом выражение (6.13) для напряжения τ_{rz}' может быть представлено в виде

$$\tau_{rz}' = \left(\frac{2K}{3\omega} + \frac{1}{2}\mu \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\sigma_z^0}{3\omega} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (6.16)$$

так как

$$\sigma_z^0 = 2K + \frac{2}{3}\mu\omega \quad (6.17)$$

Так как вязкоупругая среда принята несжимаемой, то имеет место уравнение

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} (rv_z) + \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) = 0 \quad (6.18)$$

которое получается в результате вычитания левых частей уравнения несжимаемости возмущенного и основного течений. Вторая форма уравнения (6.18) позволяет заключить, что

$$rv_z = -\frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad rv_r = \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (6.19)$$

где χ — некоторая функция переменных r и z , а также и времени, которое в нашей задаче фиксировано.

Для компонент тензора напряжений возмущенного движения из (6.13) и (6.16) получаем выражения

$$\begin{aligned}\sigma_z' &= \sigma_z^0 + \sigma - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, & \tau_{rz}' &= \mu s \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \right] \\ \sigma_r' &= \sigma + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right), & \sigma_\theta' &= \sigma + \mu \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial z}\end{aligned}\quad (6.20)$$

где

Если движение симметрично

Подобно τ_{rz}' , σ_r' и σ_θ'

$r \frac{\partial \sigma}{\partial r}$

$r \frac{\partial \sigma}{\partial z}$

Итак

$s \frac{\partial \chi}{\partial r}$

После приема

$s \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)$

Градиенты могут быть взяты для этого и напряжений усложним

причем σ_r' и σ_θ' могут

Составим дифференциал

Подобно

и

в котором фигурирует

где

$$s = \frac{c_2^0}{3\omega\mu} > 0$$

(6.11)

Если отбросить инерционные члены и массовые силы в уравнениях движения среды (1.5), то в цилиндрических координатах при наличии осевой симметрии они примут вид:

(6.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 & \frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial z} - \sigma_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 & \text{или} & \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial (r\sigma_z)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Подставляя в эти уравнения выражения (6.20) для напряжений σ_r' , τ_{rz}' и σ_z' , для определения функций σ и χ получим

(6.13)

$$r \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \right] + \mu s \left[\frac{\partial^3 \chi}{\partial z^3} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} \right) \right] - \mu \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \quad (6.22)$$

$$r \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \mu s \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z^2} - \mu s \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \right] - \mu \frac{\partial^3 \chi}{\partial z^2 \partial r} = 0$$

Исключая из этих уравнений функцию σ , имеем

$$s \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \right) + (1-2s) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + s \frac{\partial^4 \chi}{\partial z^4} = 0$$

После выполнения операций дифференцирования последнее уравнение принимает вид:

(6.15)

$$s \left(\frac{\partial^4 \chi}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + 2(1-s) \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z^2} \right) + s \frac{\partial^4 \chi}{\partial z^4} = 0 \quad (6.23)$$

Граничные условия на возмущенной боковой поверхности цилиндра могут быть написаны аналогично условиям на криволинейных краях полосы. Для этого достаточно заменить координаты x и y соответственно на z и r и напряжения σ_x^0 , σ_y^0 и τ_{xy}^0 на σ_r^0 , σ_r' и τ_{rz}' . Таким образом получаем условия

$$\sigma_r^0 a \sin az + \tau_{rz}' = 0, \quad \sigma_r' = 0 \quad (6.24)$$

причем аналогично задаче о растяжении полосы значения напряжений τ_{rz}' и σ_r' можно брать на границе невозмущенного течения, т. е. при $r=R$.

Сообразуясь с видом граничных условий, будем искать решение дифференциального уравнения для функции χ в виде

$$\chi = \sin az \varphi(ar) \quad (6.25)$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.23) и производя сокращения, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\varphi(ar)$

$$\varphi^{IV}(t) - \frac{2}{t} \varphi'''(t) + \left(\frac{3}{t^2} - 2\gamma \right) \left[\varphi''(t) - \frac{1}{t} \varphi'(t) \right] + \varphi(t) = 0 \quad (6.26)$$

в котором за независимую переменную t принято произведение ar и коэффициент γ представляет выражение:

$$\gamma = \frac{1-s}{s} = \frac{3\omega\mu - c_2^0}{c_2^0} = \frac{3\omega\mu - 4K}{3\omega\mu + 4K} \quad (6.27)$$

причем $-1 < \nu < 1$. Левая часть уравнения для $\varphi(t)$ может быть представлена с помощью произведения двух коммутативных дифференциальных операторов

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{t} \frac{d}{dt} + \gamma^2\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{t} \frac{d}{dt} + \bar{\gamma}^2\right) \varphi = 0 \quad (6.28)$$

где

$$\gamma = \alpha + i\beta, \quad \bar{\gamma} = \alpha - i\beta, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \quad (6.29)$$

Таким образом решение дифференциального уравнения (6.26) для $\varphi(t)$ является суммой общих решений двух дифференциальных уравнений второго порядка. Подстановкой

$$\varphi(t) = t\psi(t) \quad (6.30)$$

где $\psi(t)$ — новая неизвестная функция, эти уравнения приводятся к известным уравнениям для функции Бесселя первого порядка

$$\psi''(t) + \frac{1}{t} \psi'(t) + \left(\gamma^2 - \frac{1}{t^2}\right) \psi(t) = 0, \quad \psi''(t) + \frac{1}{t} \psi'(t) + \left(\bar{\gamma}^2 - \frac{1}{t^2}\right) \psi(t) = 0 \quad (6.31)$$

Таким образом функция $\varphi(t)$ является линейной комбинацией функций $tJ_1(\gamma t)$, $tJ_1(\bar{\gamma}t)$, $tN_1(\gamma t)$ и $tN_1(\bar{\gamma}t)$, где $J_1(z)$ означает целую функцию Бесселя первого порядка и $N_1(z)$ функцию Неймана.

Так как функция Неймана первого порядка при значении аргумента, равном нулю, имеет простой полюс, то вследствие ограниченности возмущения скоростей

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{a^2}{t} \cos az \varphi(t), \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} = -\frac{a^2}{t} \sin az \varphi'(t) \quad (6.32)$$

при $t=0$ следует не включать функции Неймана в выражение для функции $\varphi(t)$. Поэтому примем для функции $\varphi(t)$ выражение

$$\varphi(t) = C u(t) + \bar{C} \bar{u}(t) \quad (6.33)$$

где через $u(t)$ и $\bar{u}(t)$ будем обозначать функции

$$u(t) = \gamma t J_1(\gamma t), \quad \bar{u}(t) = \bar{\gamma} t J_1(\bar{\gamma} t) \quad (6.34)$$

Нетрудно видеть, что при такой форме записи функция $\varphi(t)$ принимает действительные значения и зависит от двух произвольных постоянных, входящих в состав сопряженных комплексных постоянных C и \bar{C} . Из вышеизложенного следует, что сопряженные функции u и \bar{u} удовлетворяют уравнениям

$$u'' - \frac{1}{t} u' = -\gamma^2 u, \quad \bar{u}'' - \frac{1}{t} \bar{u}' = -\bar{\gamma}^2 \bar{u} \quad (6.35)$$

7. Комплексную постоянную C находим из граничных условий задачи. Для этой цели определим напряжение σ и затем подсчитаем напряжения σ_r и σ_{rz} на боковой поверхности цилиндра. Подставим в уравнения (6.22) функцию χ , выраженную через функцию $\varphi(t)$ согласно (6.25), и определим из них частные производные функции σ по переменным r и z . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial r} &= -\mu s \cos az \left\{ \nu \left[\frac{a^2}{r} \varphi''(ar) - \frac{a^2}{r^2} \varphi'(ar) \right] - \frac{a^2}{r} \varphi(ar) \right\} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= \mu s \sin az \left\{ \frac{a^2}{r} \varphi'''(ar) - \frac{a^2}{r^2} \varphi''(ar) + \frac{a^2}{r^3} \varphi'(ar) - \nu \frac{a^3}{r} \varphi'(ar) \right\} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Из нес

 $\sigma =$ где $F(r) =$
подставимВыраж
менной r
часть ура
дится, так
и выражен $\sigma = -$

Далее

 $\sigma_r =$

так как

После

Так к
возмущен
имеем $\Delta =$ где $h = a$
в послед
 u и замес

Тогда

Заме

 $\gamma^2 + i + 2$

Из последнего соотношения частным интегрированием по z имеем

$$\sigma = -\mu s \cos az \left[\frac{a^3}{r} \varphi'''(ar) - \frac{a}{r^3} \varphi''(ar) + \left(\frac{1}{r^3} - \nu \frac{a^2}{r} \right) \varphi'(ar) \right] + F(r) \quad (7.2)$$

где $F(r)$ — неизвестная функция переменной r . Для отыскания этой функции подставим полученное выражение в первое из соотношений (7.1). Получим

$$\mu s \cos az \left[\frac{a^3}{r} \varphi^{IV}(ar) - \frac{2a^3}{r^3} \varphi'''(ar) + \left(\frac{3a}{r^3} - 2\nu \frac{a^2}{r} \right) \varphi''(ar) - \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{r^4} - 2\nu \frac{a^2}{r^2} \right) \varphi'(ar) + \frac{a^2}{r} \varphi(ar) \right] = -F'(r) \quad (7.3)$$

Выражение в квадратных скобках этого равенства после замены переменной r на переменную t обращается с точностью до множителя в левую часть уравнения (6.26), и, следовательно, равно нулю. Функция $F(r)$ сводится, таким образом, к некоторой постоянной, которую обозначим буквой A , и выражение (7.2) для среднего напряжения принимает вид:

$$\sigma = -\mu s a^4 \cos az \left[\frac{1}{ar} \varphi'''(ar) - \frac{1}{a^2 r^2} \varphi''(ar) + \left(\frac{1}{a^2 r^2} - \frac{\nu}{ar} \right) \varphi'(ar) \right] + A \quad (7.4)$$

Далее согласно (6.20), выполняя подстановку (6.25), имеем

$$\sigma_r' = \sigma + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) = \sigma + \mu s (1 + \nu) a^4 \cos az \left[\frac{1}{ar} \varphi'(ar) - \frac{1}{a^2 r^2} \varphi(ar) \right] \quad (7.5)$$

так как

$$1 + \nu = 1 + \frac{1-s}{s} = \frac{1}{s}$$

После введения переменной t и подстановки выражения (7.4) получим

$$\sigma_r' = -\frac{\mu s a^4 \cos az}{t} \left[\varphi'''(t) - \frac{1}{t} \varphi''(t) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{t^2} - 1 - 2\nu \right) \varphi'(t) + \frac{1+\nu}{t} \varphi(t) \right] + A \quad (7.6)$$

Так как согласно второму граничному условию на боковой границе невозмущенного цилиндра напряжение σ_r' должно обращаться в нуль, то имеем

$$A = 0, \quad \varphi'''(h) - \frac{1}{h} \varphi''(h) + \left(\frac{1}{h^2} - 1 - 2\nu \right) \varphi'(h) + \frac{1+\nu}{h} \varphi(h) = 0 \quad (7.7)$$

где $h = aR$ — значение переменной t , соответствующее границе. Подставим в последнее соотношение выражение (6.33) функции φ через функции u и \bar{u} и заметим, что дифференцирование (6.35) дает

$$u''' - \frac{1}{t} u'' + \frac{1}{t^2} u' = -\gamma^2 u', \quad \bar{u}''' - \frac{1}{t^2} \bar{u}'' + \frac{1}{t^3} \bar{u}' = -\bar{\gamma}^2 \bar{u}' \quad (7.8)$$

Тогда из (7.7) получим

$$\left[-(\gamma^2 + 1 + 2\nu) u'(h) + \frac{1+\nu}{h} u(h) \right] C + \\ + \left[-(\bar{\gamma}^2 + 1 + 2\nu) \bar{u}'(h) + \frac{1+\nu}{h} \bar{u}(h) \right] \bar{C} = 0 \quad (7.9)$$

Замечая, что $2\nu = -\gamma^2 - \bar{\gamma}^2$ и $1 = \bar{\gamma}\gamma$, согласно (6.29), имеем

$$\gamma^2 + 1 + 2\nu = \bar{\gamma}(\gamma - \bar{\gamma}), \quad \bar{\gamma}^2 + 1 + 2\nu = \gamma(\bar{\gamma} - \gamma), \quad 1 + \nu = -\frac{1}{2}(\gamma - \bar{\gamma})^2 \quad (7.10)$$

Используя эти равенства, получаем из (7.9)

$$\frac{C}{\gamma \bar{u}'(h) + \frac{1}{2}(\bar{\gamma} - \gamma) \frac{\bar{u}(h)}{h}} = \frac{\bar{C}}{\gamma u'(h) + \frac{1}{2}(\gamma - \bar{\gamma}) \frac{u(h)}{h}} = D \quad (7.11)$$

где D — действительная постоянная, так как отношения, стоящие в левой и правой частях полученного равенства, являются сопряженными.

Вместо в (6.33) постоянные C и \bar{C} через D , получим для функции φ выражение

$$\varphi = D \left\{ \left[\gamma u'(t) + \frac{1}{2}(\bar{\gamma} - \gamma) \frac{u(h)}{h} \right] u(t) + \left[\bar{\gamma} u'(t) + \frac{1}{2}(\gamma - \bar{\gamma}) \frac{u(h)}{h} \right] \bar{u}(t) \right\} \quad (7.12)$$

Выражение (6.20) для касательного напряжения τ_{rz}' после замены χ выражением (6.25) и ar' и через t будет иметь вид:

$$\tau_{rz}' = -\frac{\mu s a^3 \sin az}{t} \left[\varphi''(t) - \frac{1}{t} \varphi'(t) + \varphi(t) \right] \quad (7.13)$$

Оно обращается в нуль на крайних сечениях цилиндра. Подставляя в это выражение представление (6.33) функции φ через функции u и \bar{u} и вспоминая (6.35), получаем

$$\tau_{rz}' = -\frac{\mu s a^3 \sin az}{t} \left[(1 - \gamma^2) C u(t) + (1 - \bar{\gamma}^2) \bar{C} \bar{u}(t) \right] \quad (7.14)$$

или, заменяя постоянные C и \bar{C} согласно (7.11) через D и принимая во внимание, что $1 - \gamma^2 = \gamma(\bar{\gamma} - \gamma)$ и $1 - \bar{\gamma}^2 = \bar{\gamma}(\gamma - \bar{\gamma})$, в силу (6.29) имеем

$$\tau_{rz}' = -\frac{\mu s a^3 \sin az}{t} (\bar{\gamma} - \gamma) D \left\{ \gamma \left[\gamma \bar{u}'(h) + \frac{1}{2}(\bar{\gamma} - \gamma) \frac{\bar{u}(h)}{h} \right] u(t) - \bar{\gamma} \left[\bar{\gamma} u'(h) + \frac{1}{2}(\gamma - \bar{\gamma}) \frac{u(h)}{h} \right] \bar{u}(t) \right\} \quad (7.15)$$

На границе невозмущенного течения, т. е. при $t = h$, напряжение τ_{rz}' будет

$$\tau_{rz}' = -\frac{\mu s a^3 \sin az}{h} (\bar{\gamma} - \gamma) D \left[\gamma^2 u(h) \bar{u}'(h) - \bar{\gamma}^2 \bar{u}(h) u'(h) - (\gamma^2 - \bar{\gamma}^2) \frac{u(h) u'(h)}{2h} \right] \quad (7.16)$$

Это выражение можно преобразовать к несколько иному виду. Для этой цели рассмотрим функцию

$$B(t) = \gamma^2 u(t) \bar{u}'(t) - \bar{\gamma}^2 \bar{u}(t) u'(t) \quad (7.17)$$

Ее производная, если воспользоваться выражением u'' и \bar{u}'' из равенств (6.35), имеет вид:

$$B'(t) = (\gamma^2 - \bar{\gamma}^2) u'(t) \bar{u}'(t) + \frac{1}{t} [\gamma^2 u(t) \bar{u}'(t) - \bar{\gamma}^2 \bar{u}(t) u'(t)] \quad (7.18)$$

Отсюда

$$t \frac{d}{dt} \frac{B(t)}{t} = (\gamma^2 - \bar{\gamma}^2) u'(t) \bar{u}'(t) \quad (7.19)$$

и, следовательно,

$$B(t) = (\gamma^2 - \bar{\gamma}^2) t \int_0^t \frac{u'(t) \bar{u}'(t)}{t} dt + ct \quad (7.20)$$

где c — конст.
функции B
относительн

и выходящ
интеграла,
с числом ct
и правой c
нулю. Исп
ние (7.16)

так как $\bar{\gamma}$
Выража
венно поло

где γ и $\bar{\gamma}$
числяется u

и, следова
равенства (

Подста
условие (6.

в котором
станта D ои
8. Что
проекцию u
(7.12), име

где ϵ — константа интегриации. Для ее определения заметим, что разложение функции $B(t)$ по степеням переменной t начинается с членов третьей степени относительно t , так как функция $u(t)$ имеет разложение:

$$u(t) = \gamma t J_1(\gamma t) = \frac{\gamma^2 t^2}{2} - \frac{\gamma^4 t^4}{16} + \dots$$

и аналогичное разложение имеет функция $\bar{u}(t)$. Разложение по степеням t интеграла, стоящего в правой части последнего равенства, также начинается с членов третьей степени. Вследствие этого, сопоставляя разложения левой и правой частей равенства, приходим к заключению, что константа ϵ равна нулю. Используя полученное представление функции $B(t)$, можно выражение (7.16) для напряжения τ_{rz}' на границе течения записать в виде

$$\tau_{rz}' = -8\mu s a^3 \sin az \alpha \beta^2 D \left[\int_0^h \frac{u'(t) \bar{u}'(t)}{t} dt - \frac{u(h) \bar{u}(h)}{2h^2} \right] \quad (7.21)$$

так как $\bar{\gamma} - \gamma = -2\beta i$ и $\gamma^2 - \bar{\gamma}^2 = 4\alpha \beta i$.

Выражение в квадратных скобках представляет собой величину существенно положительную. Действительно, полагая

$$u = tv \quad \text{и} \quad \bar{u} = t\bar{v}$$

где v и \bar{v} — сопряженные функции переменной t , разложение которых начинается уже с первых степеней t , имеем

$$\frac{u' \bar{u}'}{t} = tv' \bar{v}' + (v\bar{v})' + \frac{v\bar{v}}{t}, \quad \frac{u\bar{u}}{2t^2} = \frac{1}{2} v\bar{v}$$

и, следовательно, рассматриваемое выражение, стоящее в квадратных скобках равенства (7.21), представляет собой сумму положительных слагаемых.

$$\int_0^h tv'(t) \bar{v}'(t) dt + \int_0^h \frac{v(t) \bar{v}(t)}{t} dt + \frac{1}{2} v(h) \bar{v}(h)$$

Подставляя выражение (7.21) для τ_{rz}' при $t=h$ в первое граничное условие (6.24), получаем для постоянной D выражение

$$D = \sigma_2 \epsilon : \left(8\alpha \beta^2 \mu s a^3 \left\{ \int_0^h \frac{u'(t) \bar{u}'(t)}{t} dt - \frac{1}{2h^2} u(h) \bar{u}(h) \right\} \right) \quad (7.22)$$

в котором все множители существенно положительны. Таким образом константа D ограничена и всегда положительна.

8. Чтобы судить об устойчивости возмущенного течения, подсчитаем проекцию возмущения скорости на направление r . Согласно (6.32), подставив (7.12), имеем

$$v_r = \frac{a^2 \cos az}{t} D \left\{ \left[\gamma \bar{u}'(h) + (\bar{\gamma} - \gamma) \frac{\bar{u}(h)}{2h} \right] u(t) + \left[\bar{\gamma} u'(h) + (\gamma - \bar{\gamma}) \frac{u(h)}{2h} \right] \bar{u}(t) \right\} \quad (8.1)$$

Для подсчета значения этой проекции на границе течения следует положить $t=h$, после чего получаем

$$v_r = \frac{a^2 \cos az}{h} D [\gamma u(h) \bar{u}'(h) + \bar{\gamma} u'(h) u(h)] \quad (8.2)$$

Равность, стоящая в квадратных скобках последнего выражения, может быть преобразована заменой функции u и \bar{u} их представлениями через функции Бесселя. Согласно известным соотношениям между функциями Бесселя, вспоминая (6.34), имеем

$$u'(t) = \frac{d}{dt} [\gamma t J_1(\gamma t)] = \gamma [J_1(\gamma t) + \gamma t J_1'(\gamma t)] = \gamma^2 t J_0(\gamma t) \quad (8.3)$$

и аналогично

$$\bar{u}'(t) = \bar{\gamma}^2 t J_0(\bar{\gamma} t) \quad (8.4)$$

Используя (6.34), (8.3) и (8.4), получаем

$$v_r = a^2 h \cos az D [J_1(\gamma h) J_0(\bar{\gamma} h) + J_1(\bar{\gamma} h) J_0(\gamma h)] \quad (8.5)$$

Обозначим через η расстояние точек возмущенной границы от цилиндрической поверхности невозмущенного течения. Имеем

$$\eta = r_0 - R = \delta \cos az \quad (8.6)$$

Если величины v_r и η имеют одинаковые знаки, т. е. $v_r/\eta > 0$, то амплитуда возмущения поверхности имеет тенденцию возрастать и обратно при разных знаках у величин v_r и η или при $v_r/\eta < 0$ возмущение должно убывать.

Составляя с помощью (8.5) и (8.6) отношение v_r/η и вспоминая, что величина D согласно выражению (7.22) существенно положительна, приходим к выводу, что знак отношения v_r/η определяется знаком суммы, стоящей в квадратных скобках выражения (8.5).

При больших значениях h можно воспользоваться асимптотическим выражением бesselевых функций

$$J_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad J_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \quad (8.7)$$

При этом для рассматриваемого выражения получим

$$J_1(\gamma h) J_0(\bar{\gamma} h) + J_1(\bar{\gamma} h) J_0(\gamma h) \approx \frac{2}{\pi h} \sin\left[(\gamma + \bar{\gamma})h - \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{2 \cos 2ah}{\pi h} \quad (8.8)$$

и, следовательно, составляя отношение v_r/η , имеем

$$\frac{v_r}{\eta} = -\frac{2a^2 D}{\pi \delta} \cos 2ah \quad (8.9)$$

Так как

$$h = aR = \frac{m\pi}{l} R = \frac{m \sqrt{\pi V}}{l \sqrt{l}} \quad (8.10)$$

где V — объем цилиндра, то величина h принимает достаточно большие значения лишь при большом числе m полуволн возмущения и при небольшой по сравнению с радиусом длине цилиндра l . По мере растяжения цилиндра величина h убывает, и отношение v_r/η может несколько раз переменить свой знак.

h	γ
0.0	+
0.2	+
0.4	+
0.6	+
0.8	+
1.0	+
1.2	+
1.4	+
1.6	+
1.8	+

При
ние v_r/η
средств

где U_0, U
ний $J_0(\gamma h)$

Приве
ний пара
построени
Так к

то аргуме

и, следов

Таки
деформир
Из ра
лиць при

¹ См.

4 Приведе

Таблица значений выражения

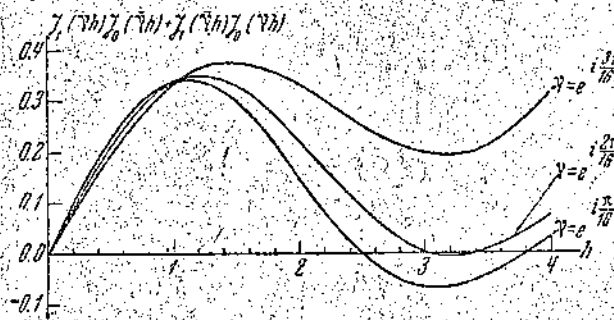
$$J_1(\gamma h) J_0(\bar{\gamma} h) + J_1(\bar{\gamma} h) J_0(\gamma h)$$

h	$\gamma = \exp i \frac{\pi}{16}$	$\gamma = \exp i \frac{2\pi}{16}$	$\gamma = \exp i \frac{3\pi}{16}$	h	$\gamma = \exp i \frac{\pi}{16}$	$\gamma = \exp i \frac{2\pi}{16}$	$\gamma = \exp i \frac{3\pi}{16}$
0.0	+0.000	+0.000	0.000	2.0	152	222	332
0.2	096	091	082	2.2	087	166	302
0.4	185	176	160	2.4	+0.022	142	269
0.6	258	248	230	2.6	-0.021	064	237
0.8	310	303	288	2.8	055	026	216
1.0	337	338	332	3.0	071	+0.002	195
1.2	339	351	361	3.2	072	-0.008	190
1.4	317	343	377	3.4	058	-0.003	198
1.6	274	316	371	3.6	033	+0.014	221
1.8	217	274	357	3.8	-0.003	040	250
				4.0	+0.029	072	313

При малых значениях h течение становится неустойчивым, ибо отношение v_r/η становится положительным. В этом можно убедиться путем непосредственного подсчета по таблицам А. Динника¹ выражения

$$J_1(\gamma h) J_0(\bar{\gamma} h) + J_1(\bar{\gamma} h) J_0(\gamma h) = U_0 U_1 + V_0 V_1 \quad (8.11)$$

где U_0, U_1 и V_0, V_1 — соответственно вещественные и мнимые части функций $J_0(\gamma h)$ и $J_1(\gamma h)$.



Фиг. 6.

Приведем таблицу значений величины $J_1 \bar{J}_0 + \bar{J}_1 J_0$ для некоторых значений параметра γ . На фиг. 6 представлены кривые для зависимости (8.11), построенные с помощью этой таблицы.

Так как согласно (6.29)

$$\gamma = e^{i\theta} = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} + i \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \quad (8.12)$$

то аргумент комплексного числа γ связан с коэффициентом ν соотношением

$$\nu = -\cos 2\theta \quad (8.13)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{s} = \frac{3\omega_0}{c_0} = 1 + \nu = 1 - \cos 2\theta. \quad (8.14)$$

Таким образом малым значениям угла θ соответствует малая скорость деформирования ω .

Из рассмотрения поведения кривых на фиг. 6 делаем заключение, что лишь при малых скоростях деформирования имеют место устойчивые течения

¹ См., например, Hayschy Funktionentafeln, 1930.

⁴ Прикладная математика и механика, т. VII, в. 2.

при малых же значениях числа h . При больших значениях числа h (что может иметь место при большом числе m полуволн возмущения границы цилиндра) должна появиться устойчивость течения и при больших значениях h скорости деформирования. Это следует из асимптотического представления отношения v_1/η при больших значениях h .

Можно показать, как и в задаче о полосе, что при сжатии цилиндра имеет место обратная картина и течение, устойчивое при каком-либо значении скорости деформирования ϕ , становится неустойчивым, если переменить направление деформирования. Поэтому при малом значении числа h неустойчивые течения могут иметь место лишь при сравнительно медленных течениях. А так как ширина этих областей значений h незначительна по сравнению с областями устойчивого движения, то получение, например, шейки при сжатии цилиндра весьма затруднительно, хотя и возможно. Вместе с тем получение волн возмущения малой длины на поверхности цилиндра возможно при широких диапазонах изменения скорости деформирования, ибо при этом число h принимает большие значения.

С небольшим видоизменением теория, развитая выше, может быть применена к изучению деформирования пластической среды, имеющей упрочнение. Величины σ_1 и v_1 будут играть в этом случае роль перемещений. Этим путем можно попытаться объяснить явление образования шейки при растяжении и сжатии цилиндрических образцов.

Наконец, та же теория может быть применена к решению задачи о медленном течении вязкой жидкости в трубе, радиус поперечного сечения которой периодически изменяется.

Поступила в редакцию 20 V. 1941.

ON THE STABILITY OF PLASTICO-VISCOUS FLOWS OF A RECTANGULAR STRIP AND A ROUND BAR

A. J. ISHLINSKY

(Summary)

The problem of the stability of plastico-viscous flow was treated recently by A. Ilyushin^[1]. Starting from the Lagrange equations for motion of a continuous medium he established the differential equations and the correspondent boundary conditions of the problem and arrived at interesting conclusions concerning the stability of flows approximating the uniform plane deformation of a strip as well as the plane deformation of a cylinder.

Using in this paper the Euler equations for motion of a continuous medium the problem of stability of the plastico-viscous flow of a strip (I) is solved for the sake of comparison with the results of Ilyushin.

To investigate the more complicated spatial problem of the plastico-viscous flow of a round bar (II) the author involves in consideration the equations for spatial deformation of a continuous medium.

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И л ь ю ш и н А. А. Ученые записки МГУ. Вып. 39. 1940.

ПРИБЛИЖИ
Ю

Задачи, с идеальной жидкостью в заданном и лемного радиуса достаточно близкой. В настоящей В основу положим уравнение

1. Мы т ообразить, в плоскости цией $\zeta = \zeta(z)$

В частно соответствие σ — длина дуги браемой прс нзначна, но можем взять значения $\theta_0 =$ и $\sigma = l$ соотв

Предположим, что ось, на

где C — константа. В работе приняты значения