1954 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. VI, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Общая теория пластичности с линейным упрочнением

А. Ю. Ишлинский

Одной из задач современной теории пластичности является установление законов пластичности для общего случая произвольного изменения компонент тензора деформаций или тензора напряжений. В настоящее время построены машины, которые в состоянии производить так называемое сложное нагружение материала и, следовательно, представляется возможным изучить упомянутые законы экспериментальным путем. Однако полезность некоторой предварительной теоретической схемы закономерностей теории пластичности при сложном нагружении вряд ли следует отрицать.

Излагаемая ниже новая теория пластичности имеет целью дать исчерпывающее математическое описание взаимоизменения напряженного и деформированного состояний материала при произвольном изменении направления главных осей и соотношений главных компонент тензора деформаций или тензора напряжений в ходе деформирования материала за пределом упругости. Явление наклепа и явление Баушингера органически укладываются в рамки новой теории и соответствующим образом обобщаются. Соотношения известной теории пластичности Генки-Ильюшина при наличии линейного упрочнения и простого нагружения (компоненты девиатора напряжений изменяются пропорционально друг другу) воспроизводятся новой теорией. При отсутствии упрочнения новая теория приводит к соотношениям теории пластичности Прандтля-Рейса, причем математическая формулировка последней теории становится более прозрачной.

Новая теория приложима лишь к материалам с линейным упрочнением (в частности, и к материалам без упрочнения). Следует, однако, иметь в виду, что для материалов с более сложным упрочнением нет надежных формул, связывающих напряжение и деформацию даже для случая простого растяжения — сжатия.

Вместе с тем новая теория допускает обобщение на случай сложного упрочнения. Получающиеся при этом математические построения в достаточной мере искусственны и ниже не приводятся.

Переходя далее к изложению новой теории, отметим, что, следуя общепринятому, деформация объема считается упругой, например, линейно зависящей от суммы главных напряжений. Все компоненты деформации считаются малыми по сравнению с единицей. Наконец, как принято в классических теориях пластичности, считается, что скорость изменения деформации не оказывает заметного влияния на напряженное состояние материала.

Таким образом, новая теория касается лишь соотношений между компонентами девиаторов напряжений и деформации, т. е. тензоров

$$\begin{pmatrix} \sigma_x-\sigma, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y-\sigma, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z-\sigma \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon, & \frac{1}{2}\gamma_{xy}, & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}, & \varepsilon_y-\varepsilon, & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}, & \frac{1}{2}\gamma_{zy}, & \varepsilon_z-\varepsilon \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z), \quad \varepsilon=\frac{1}{3}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

В пределах упругости соответствующие компоненты этих тензоров пропорциональны друг другу, причем коэффициент пропорциональности равен удвоенному модулю упругости сдвига, т. е. $2G$.

Введем величины

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x-\sigma), \quad X_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_y-\sigma), \quad X_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z-\sigma),$$

$$X_4=\tau_{yz}, \quad X_5=\tau_{zx}, \quad X_6=\tau_{xy}.$$

Совокупность величин X_i будем понимать, как проекции некоторого вектора X на ортогональные оси координат шестимерного пространства.

Введем далее вектор ξ в шестимерном пространстве с компонентами

$$\xi_1=\sqrt{2}(\varepsilon_x-\varepsilon), \quad \xi_2=\sqrt{2}(\varepsilon_y-\varepsilon), \quad \xi_3=\sqrt{2}(\varepsilon_z-\varepsilon),$$

$$\xi_4=\gamma_{yz}, \quad \xi_5=\gamma_{zx}, \quad \xi_6=\gamma_{xy}.$$

Величины ξ_i с точностью до изменения объема определяют деформацию, а величины X_i с точностью до гидростатического давления (иначе суммы главных напряжений) определяют напряженное состояние материала.

Заметим, что всегда

$$X_1+X_2+X_3=0, \quad \xi_1+\xi_2+\xi_3=0,$$

и в сущности мы имеем здесь дело не с шестимерным пространством, а с пятимерным. Однако, не забывая этого обстоятельства, в дальнейшем мы сохраним шестимерную трактовку векторов X и ξ, как более удобную и приводящую к формулам симметрического вида. В пределах упругости, согласно обобщенному закону Гука,

$$X_i=G\xi_i, \quad i=1, 2, \ldots, 6.$$

В классических теоремах пластичности, как известно, играют большую роль так называемые интенсивность напряжения σ_i и интенсивность деформации ε_i, определяемые формулами

$$\sigma_i=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2+6(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)},$$

$$\varepsilon_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2)}$$

и являющиеся соответственно инвариантами второго порядка девиатора напряжения и девиатора деформаций.

Интенсивность напряжения σ_i с точностью до постоянного множителя равна модулю вектора X, именно:

$$\sigma_i=\sqrt{3}\,|X|.$$

Аналогично имеем

$$\varepsilon_i=\frac{1}{\sqrt{3}}|\xi|.$$

Примем, что остаточные деформации при деформировании материала из так называемого естественного состояния появляются лишь после того, как вектор деформации ξ превысит по модулю значение

$$|\xi|=\frac{K}{G}.$$

При этом модуль вектора X превысит значение пластической постоянной K, что совпадает с формулировкой условия начала пластических деформаций в теории пластичности Генки-Ильюшина.

Введем теперь вектор x с проекциями

$$x_1=\sqrt{2}\,(\varepsilon_x^0-\varepsilon^0),\quad x_2=\sqrt{2}\,(\varepsilon_y^0-\varepsilon^0),\quad x_3=\sqrt{2}\,(\varepsilon_z^0-\varepsilon^0),$$
$$x_4=\gamma_{yz}^0,\quad x_5=\gamma_{zx}^0,\quad x_6=\gamma_{xy}^0,$$

которые определяют остаточную деформацию тела (также с точностью до изменения объема).

Примем далее, что упругая часть деформации, т. е. разность ξ_j-x_j связаны с напряжениями X_j соотношениями прямой пропорциональности

$$X_j=G\,(\xi_j-x_j),$$

где G — модуль сдвига.

Законы различных теорий пластичности выражают в сущности правила, согласно которым по перемещению точки ξ с координатами ξ_j (полная деформация) в нашем шестимерном пространстве определяется перемещение точки x с координатами x_j (остаточная деформация) и тем самым изменение величин X_j (напряженное состояние).

В частности, теория Генки-Ильюшина приводит к требованию, чтобы при так называемой активной пластической деформации (интенсивность напряжений $\sigma_i=\sigma_i(\varepsilon_i)$ возрастает) точка x находилась на прямой, соединяющей начало координат с точкой ξ.

Действительно, согласно этой теории, компоненты девиатора напряжений и девиатора деформаций при активной пластической деформации должны быть пропорциональны друг другу, что приводит к пропорции

$$\frac{\sigma_x-\sigma}{\varepsilon_x-\varepsilon}=\frac{\sigma_y-\sigma}{\varepsilon_y-\varepsilon}=\frac{\sigma_z-\sigma}{\varepsilon_z-\varepsilon}=\frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}}=\frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}}=\frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}=\frac{2}{3}\,\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$

из которой следует, что векторы X и ξ параллельны. Далее, в силу так называемого закона упругой разгрузки этой теории, при последующем уменьшении интенсивности напряжений σ_i изменения компонентов девиатора напряжений пропорциональны изменениям соответствующих компонент девиатора деформации и, следовательно, точка x, изображающая деформацию при полной разгрузке будет находиться на прямой, соединяющей точку ξ с началом координат. Что же касается расстояний точки x и точки ξ от начала координат, то они легко определяются, если принять во внимание соотношения закона нагрузки и закона разгрузки, которые в наших обозначениях можно представить в виде

$$X = \frac{\xi}{|\xi|} f(|\xi|) = G(\xi - x),$$

где

$$f(|\xi|) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |\xi| \right).$$

Согласно новой теории пластичности, активная пластическая деформация происходит при соблюдении неравенства

$$\sum_{j=1}^{6} [G(\xi_j - x_j) - Hx_j] \, d\xi_j > 0;$$

здесь коэффициент H характеризует модуль упрочнения материала. При этом величины x_j и ξ_j связаны одним алгебраическим соотношением

$$\sum_{j=1}^{6} [G(\xi_j - x_j) - Hx_j]^2 = K^2$$

$$H = \frac{GG'}{G - G'}$$

и четырьмя дифференциальными

$$\frac{dx_1}{G(\xi_1 - x_1) - Hx_1} = \frac{dx_2}{G(\xi_2 - x_2) - Hx_2} = \cdots = \frac{dx_6}{G(\xi_6 - x_6) - Hx_6}$$

(одно из первых трех приведенных отношений является следствием равенства двух других, так как $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$).

Дифференциальные соотношения могут быть представлены так же в виде

$$\frac{dx_j}{G(\xi_j - x_j) - Hx_j} = \frac{dx_j}{X_j - Hx_j} = \frac{ds}{K},$$

где ds — дифференциал дуги траектории, описываемой в шестимерном пространстве точкой x, т. е.

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{6} dx_j^2.$$

Если, напротив,

$$\sum_{j=1}^{6} [G(\xi_j - x_j) - Hx_j] \, dx_j \leqslant 0,$$

то следует считать координаты x_j постоянными; этот случай соответствует упругой разгрузке.

Приведем теперь некоторые частные случаи деформаций для выяснения особенностей новой теории.

1°. Пусть пластическая деформация происходит так, что точка ξ перемещается в шестимерном пространстве по прямой. Соответствующим введением новой прямоугольной системы координат $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_6$ всегда можно достичь того, чтобы упомянутая прямая оказалась параллельной одной из осей координат. Тогда уравнению прямой можно придать такой вид:

$$\eta_1 = \lambda, \quad \eta_2 = \alpha_2, \; \eta_3 = \alpha_3, \ldots, \eta_6 = \alpha_6,$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_6$ — постоянные числа, а λ — параметр, определяющий положение точки ξ на прямой. Началу деформации соответствует некоторое значение этого параметра $\lambda = \lambda_0$, определяемое начальным значением координаты η_1.

Очевидно, что в новой системе координат алгебраическое соотношение сохраняет свой вид, ибо его левая часть представляет собой квадрат модуля некоторого вектора, и, следовательно, она инвариантна к преобразованию координат. То же относится и к дифференциальным соотношениям, которые выражают параллельность упомянутого вектора элементарному перемещению ds точки x.

В новых обозначениях алгебраическое и дифференциальное соотношения имеют вид:

$$\frac{dy_j}{G(\eta_j-y_j)-Hy_j}=\frac{ds}{K} \qquad (j=1,2,\ldots,6)$$

$$\sum_{j=1}^{j=6}[G(\eta_j-y_j)-Hy_j]^2=K^2,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_6$ — координаты точки x в новой системе координат.

Так как из величин η_j лишь первая ($\eta_1=\lambda$) изменяется, то, дифференцируя алгебраическое соотношение по λ, придем к соотношению в дифференциалах:

$$[G(\lambda-y_1)-Hy_1]\,Gd\lambda-\sum_{j=1}^{j=6}[G(\eta_j-y_j)-Hy_j](G+H)\,dy_j=0.$$

Заменяя здесь дифференциалы dy_j выражениями

$$dy_j=[G(\eta_j-y_j)-Hy_j]\frac{ds}{K},$$

получим

$$[G(\lambda-y_1)-Hy_1]\,Gd\lambda=\sum_{j=1}^{6}[G(\eta_j-y_j)-Hy_j]^2(G+H)\frac{ds}{K}=K(G+H)\,ds.$$

Учитывая, в частности, что

$$ds=\frac{Kdy_1}{G(\eta_1-y_1)-Hy_1},$$

придем к дифференциальному уравнению

$$[G(\lambda-y_1)-Hy_1]^2\,Gd\lambda=(G+H)\,K^2\,dy_1$$

для определения компоненты остаточной деформации y_1, как функции параметра λ.

Интеграл этого уравнения имеет вид:

$$G(\lambda-y_1)-Hy_1=K\,\mathrm{th}\left(\frac{G\lambda}{K}+C_1\right),$$

где C_1 — постоянная, определяемая начальным условием $y_1=y_1^0$ при $\lambda=\lambda^0$.

Используя полученное дифференциальное уравнение и его интеграл, имеем

$$\frac{dy_j}{G(\eta_j-y_j)-Hy_j}=\frac{dy_1}{G(\lambda-y_1)-Hy_1}=\frac{G[G(\lambda-y_1)-Hy_1]\,d\lambda}{K^2(G+H)}=$$

$$=\frac{G}{K(G+H)}\,\mathrm{th}\left(\frac{G\lambda}{K}+C_1\right)d\lambda, \qquad j=2,3,\ldots,6,$$

откуда, учитывая, что $\eta_j = \alpha_j = \mathrm{const}$ в результате интеграции приходим к соотношениям вида:

$$G(\alpha_j - y_j) - Hy_j = C_j \operatorname{sech}\left(\frac{G\lambda}{K} + C_1\right),$$

где C_j — постоянные, определяемые начальными условиями $y_j = y_j^0$ при $\lambda = \lambda^0$ (начальная остаточная деформация). Эти постоянные (равно как и начальные условия y_j^0) не независимы между собою, так как

$$[G(\lambda - y_1) - Hy_1]^2 + \sum_{j=2}^{j=6} [G(\alpha_j - y_j) - Hy_j]^2 =$$

$$= K^2 \operatorname{th}^2\left(\frac{G\lambda}{K} + C_1\right) + \sum_{j=2}^{j=6} C_j^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{G\lambda}{K} + C_1\right) = K^2$$

и вследствие тождества $\operatorname{th}^2 z = 1 - \operatorname{sech}^2 z$ должно быть

$$C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_6^2 = K^2.$$

В некоторых случаях $\operatorname{th}\left(\frac{G\lambda}{K} + C_1\right)$ вырождается в единицу ($C_1 = \infty$), причем все константы C_j обращаются в нуль. К этим случаям относятся, в частности, простейшие нагружения — растяжение, сжатие и сдвиг — за предел упругости из первоначального естественного состояния тела.

2°. В случае простого растяжения

$$\sigma_x \neq 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_x$$

и, следовательно,

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma) = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_x, \quad X_2 = X_3 = -\frac{\sqrt{2}}{6}\sigma_x, \quad X_4 = X_5 = X_6 = 0.$$

Если деформирование ведется из естественного состояния, то

$$x_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 6.$$

Введем новую прямоугольную систему координат $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_6$ так, чтобы ось η_1 была параллельна вектору X. Таких систем можно указать сколько угодно. Одной из них будет система, определяемая следующей таблицей косинусов углов между ее осями и осями исходной системы

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
η_1	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	0	0
η_2	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
η_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0
η_4	0	0	0	1	0	0
η_5	0	0	0	0	1	0
η_6	0	0	0	0	0	1

Обозначим проекции вектора X на оси η_j через Y_j, вектора ξ через η_j и, наконец, вектора x через y_j.

Имеем в соответствии с таблицей косинусов

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2X_1 - X_2 - X_3) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{3}}$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_2 - X_3) = 0$$

$$Y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3) = 0$$

$$Y_4 = Y_5 = Y_6 = 0.$$

Согласно предыдущему, предел упругости будет достигнут, если осуществится равенство

$$|X| = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=6} Y_j^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{3}} = K,$$

т. е. при

$$\sigma_x = K\sqrt{3} = \sigma_s.$$

Дальнейшее увеличение σ_x вызовет пластическую деформацию, подчиняющуюся дифференциальным соотношениям

$$\frac{dy_j}{G(\eta_j - y_j) - Hy_j} = \frac{dy_j}{Y_j - Hy_j} = \frac{ds}{K} \qquad j = 1, 2, \ldots, 6$$

и алгебраическому равенству

$$\sum_{j=1}^{j=6} [G(\eta_j - y_j) - Hy_j]^2 = \sum_{j=1}^{j=6} (Y_j - Hy_j)^2 = K^2.$$

Так как $Y_j = 0$ $(j = 2, 3, \ldots, 6)$, то дифференциальные соотношения дают

$$y_j = y_j^0 e^{-\frac{H}{K}s},$$

где s — длина дуги траектории, описываемой точкой x при пластическом деформировании. В нашем случае $y_j^0 = 0$ и, следовательно, y_j $(j = 2, 3, \ldots, 6)$ тождественно равны нулю. Вследствие этого алгебраическое равенство приводится к виду

$$(Y_1 - Hy_1)^2 = K^2,$$

откуда

$$y_1 = \frac{1}{H}(Y_1 - K) = \frac{1}{H}\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{3}} - K\right).$$

Возвращаясь вновь к системе координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$, получим, пользуясь таблицей косинусов, что остаточная деформация после растяжения за предел упругости характеризуется величинами:

$$x_1 = \sqrt{2}\,\varepsilon_x^0 = \frac{2}{\sqrt{6}} y_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{H}\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{3}} - K\right), \quad x_2 = x_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}} y_1, \quad x_4 = x_5 = x_6 = 0.$$

Так как

$$G(\xi_1-x_1)=X_1=\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_x,\quad \xi_1=\sqrt{2}(\varepsilon_x-\varepsilon),$$

причем

$$\varepsilon=\frac{1-2\nu}{G}\sigma=\frac{1-2\nu}{3G}\sigma_x,$$

то выражение полной деформации ε_x за пределом упругости, т. е. при $\sigma_x>\sigma_s$ имеет вид

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{2(1+\nu)G}+\frac{\sigma_x-\sigma_s}{3H},$$

что соответствует закону линейного упрочнения. Заметим, что

$$2(1+\nu)G=E,$$

где E — модуль упругости растяжения (модуль Юнга), ν — коэффициент Пуассона.

3°. Пусть после растяжения некоторой полосы за предел упругости напряжением σ_x полоса (или соответственно вырезанный из нее элемент) растягивается напряжением σ_y. Подсчитаем, при каком напряжении появятся новые пластические деформации и как они будут изменяться по мере увеличения σ_y.

Теперь

$$X_1=-\frac{\sqrt{2}}{6}\sigma_y,\quad X_2=\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_y,\quad X_3=X_1,\quad X_4=X_5=X_6=0$$

и, согласно предыдущему,

$$x_1^0=\frac{2}{\sqrt{6}}y_1,\quad x_2^0=x_3^0=-\frac{1}{\sqrt{6}}y_1,\quad x_4^0=x_5^0=x_6^0=0;\quad y_1=\frac{1}{H}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}}-K\right),$$

где σ_x^* — наибольшее напряжение, достигнутое при предварительном растяжении полосы напряжением σ_x.

Введем новую систему координат $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_6$ так, чтобы ось ζ_1 была параллельна вектору X. Одной из таких систем будет та, направление осей которой определяется следующей таблицей косинусов:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
ζ_1	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	0	0
ζ_2	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
ζ_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0
ζ_4	0	0	0	1	0	0
ζ_5	0	0	0	0	1	0
ζ_6	0	0	0	0	0	1.

Проекции вектора X на эти оси равны соответственно

$$Z_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(-X_1+2X_2-X_3)=\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}},\quad Z_2=Z_3=\ldots=Z_6=0.$$

Координаты точки x, характеризующей начальную остаточную деформацию в новой системе координат, представляются выражениями

$$z_1^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_1^0 + 2x_2^0 - x_3^0) = -\frac{1}{2}y_1 = -\frac{1}{2H}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}} - K\right)$$

$$z_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1^0 + x_3^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}y_1$$

$$z_3^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0) = 0$$

$$z_4^0 = z_5^0 = z_6^0 = 0.$$

Чтобы отыскать новый предел упругости σ_y^*, следует разрешить уравнение

$$\sum_{j=1}^{j=6}(Z_j - Hz_j)^2 = \left(\frac{\sigma_y^*}{\sqrt{3}} - Hz_1^0\right)^2 + (Hz_2^0)^2 = K^2$$

относительно σ_y^*. Получим, имея в виду корень $\sigma_y^* > 0$

$$\sigma_y^* = \sqrt{3}\left[Hz_1^0 + \sqrt{K^2 - (Hz_2^0)^2}\right]$$

или, подставляя значения z_1^0 и z_2^0 и вводя обозначение

$$\frac{\sigma_x^*}{K\sqrt{3}} = \frac{\sigma_x^*}{\sigma_s} = \alpha,$$

получим для предела упругости при растяжении в поперечном направлении формулу

$$\sigma_y^* = \sigma_s\left[-\frac{1}{2}(\alpha - 1) + \sqrt{1 - \frac{3}{4}(\alpha - 1)^2}\right].$$

Пусть $\alpha = 1{,}2$; т. е. при предварительном растяжении напряжением σ_x предел упругости был превзойден на 20%. Тогда при последующем растяжении напряжением σ_y предел упругости будет достигнут при напряжении

$$\sigma_y^* = 0{,}885\sigma_s.$$

Рассмотрим теперь, как будет происходить деформация за пределом упругости. Имеем исходные уравнения

$$\frac{dz_j}{Z_j - Hz_j} = \frac{ds}{K}, \quad j = 1, 2, \ldots, 6; \quad \sum_{j=1}^{j=6}(Z_j - Hz_j)^2 = K^2,$$

причем

$$Z_1 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}, \quad Z_j = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, 6$$

$$z_1^0 = -\frac{1}{2H}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}} - K\right), \quad z_2^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2H}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}} - K\right)$$

$$z_j^0 = 0, \qquad j = 3, \ldots, 6.$$

Очевидно, что

$$z_j = z_j^0 e^{-\frac{H}{K}s} = 0, \quad j = 3, \ldots, 6,$$

следовательно, надлежит рассмотреть единственное дифференциальное соотношение

$$\frac{dz_1}{\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - Hz_1} = \frac{dz_2}{-Hz_2}$$

при наличии равенства

$$\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - Hz_1\right)\left(\frac{d\sigma_y}{\sqrt{3}} - H dz_1\right) + H^2 z_2\, dz_2 = 0.$$

Аналогично выкладкам п. 1[0], дифференцируя последнее равенство, получим

$$\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - Hz_1\right)^2 \frac{d\sigma_y}{\sqrt{3}} - HK^2\, dz_1 = 0.$$

Подставляя сюда из дифференциального соотношения dz_2 и учитывая предыдущее алгебраическое равенство, имеем

$$\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - Hz_1\right)^2 \frac{d\sigma_y}{\sqrt{3}} - HK^2\, dz_1 = 0.$$

Интеграл последнего дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - Hz_1 = K \operatorname{th}\left(\frac{\sigma_y}{K\sqrt{3}} + C\right).$$

Используя алгебраическое равенство, получим

$$Hz_2 = K \operatorname{sech}\left(\frac{\sigma_y}{K\sqrt{3}} + C\right),$$

где постоянная C находится из условия

$$\sigma_y = \sigma_y^*, \quad z_1 = z_1^0 = -\frac{1}{2H}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}} - K\right).$$

Нетрудно убедиться, что условие

$$\sigma_y = \sigma_y^*, \quad z_2 = z_2^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2H}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}} - K\right)$$

при этом соблюдается автоматически, так как

$$\left(\frac{\sigma_y^*}{\sqrt{3}} - Hz_1^0\right)^2 + (Hz_2^0)^2 = K^2.$$

Уравнение для отыскания постоянной C можно привести к виду

$$\frac{\sigma_y^*}{\sigma_s} + \frac{\sigma_x^* - \sigma_s}{2\sigma_s} = \operatorname{th}\left(\frac{\sigma_y^*}{\sigma_s} + C\right), \quad \sigma_s = K\sqrt{3}.$$

Можно также показать, что левая часть уравнения по модулю всегда меньше единицы.

Возвращаясь к старым переменным x_i, получим, в частности,

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{1}{H}\left[\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - K \operatorname{th}\left(\frac{\sigma_y}{K\sqrt{3}} + C\right)\right].$$

Так как

$$X_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_y = G(\xi_2 - x_2), \quad \xi_2 = \sqrt{2}(\varepsilon_y - \varepsilon),$$

то

$$\varepsilon_y = \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X_2}{G} + x_2\right) = \varepsilon + \frac{\sigma_y}{3G} + \frac{1}{H\sqrt{3}}\left[\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} - K\,\mathrm{th}\left(\frac{\sigma_y}{K\sqrt{3}} + C\right)\right]$$

или

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{2(1+\nu)G} + \frac{\sigma_y}{3H} - \frac{K}{H\sqrt{3}}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sigma_y}{K\sqrt{3}} + C\right), \quad (\sigma_y > \sigma_y^*).$$

Последнему выражению можно придать также форму

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{2(1+\nu)G} + \frac{\sigma_y - \sigma_s}{3H} + \frac{\sigma_s}{3H}\left[1 - \mathrm{th}\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_s} + C\right)\right], \quad (\sigma_y > \sigma_y^*),$$

из которой следует, что при достаточно больших значениях σ_y закон деформации приближается к закону простого линейного упрочнения, полученному в конце 2⁰. Если растягивающее напряжение $\sigma_y < \sigma_y^*$, то, в соответствии с общими положениями теории, следует считать $x_2 = x_2^0$ постоянным. В этом случае

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{2(1+\nu)G} - \frac{\sigma_x^* - \sigma_s}{6H}.$$

При $\sigma_y = \sigma_y^*$ обе формулы дают один и тот же результат.

4⁰. Рассмотрим теперь растяжение элемента, который произвольно вырезан из полосы, подвергающейся предварительному растяжению за предел упругости напряжением σ_x^*. Обозначим через θ угол между направлением элемента и осью x и через σ — напряжение элемента при растяжении.

В соответствии с простейшими формулами сопротивления материалов и теории упругости имеем

$$\sigma_x = \sigma\cos^2\theta, \quad \sigma_y = \sigma\sin^2\theta, \quad \tau_{xy} = \sigma\cos\theta\sin\theta$$
$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$$

и, следовательно, согласно предыдущему,

$$X_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right), \quad X_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left(\sin^2\theta - \frac{1}{3}\right), \quad X_3 = -\frac{\sigma}{3\sqrt{2}}$$
$$X_4 = X_5 = 0, \quad X_6 = \sigma\cos\theta\sin\theta.$$

В п. 2⁰ были подсчитаны остаточные деформации, которые возникают при предварительном растяжении полосы напряжением σ_x^*. Именно:

$$x_1^0 = \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{H}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}} - K\right), \quad x_2^0 = x_3^0 = -\frac{1}{2}x_1^0, \quad x_4^0 = x_5^0 = x_6^0 = 0.$$

Зная эти величины, можно, пользуясь алгебраическим соотношением

$$\sum_{j=1}^{j=6}(X_j - Hx_j^0)^2 = K^2,$$

найти, при каком значении напряжения $\sigma = \sigma^*$ будет достигнут предел упругости при растяжении «косого» элемента.

В развернутом виде уравнение для упомянутого предела упругости следующее:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^*\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}}-K\right)\right]^2+$$

$$+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^*\left(\sin^2\theta-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}}-K\right)\right]^2+$$

$$+\left[-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sigma^*+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}}-K\right)\right]^2+(\sigma^*\cos\theta\sin\theta)^2=K^2.$$

Введем обозначения

$$p=\frac{1}{K}\left(\frac{\sigma_x^*}{\sqrt{3}}-K\right)=\frac{\sigma_x^*-\sigma_s}{\sigma_s}=\alpha-1,\quad u=\frac{\sigma^*}{K\sqrt{3}}=\frac{\sigma^*}{\sigma_s}.$$

Тогда после раскрытия скобок и приведения подобных членов получим для u квадратное уравнение

$$u^2+(1-3\cos^2\theta)pu+p^2=1.$$

Положительный корень этого уравнения определяет величину предела упругости σ^*, соответствующую растяжению, а отрицательный — сжатию элемента. При $\theta=90^0$ получаем уравнение

$$u^2+pu+p^2=1,$$

откуда

$$u=-\frac{p}{2}+\sqrt{1-\frac{3}{4}p^2},$$

что совпадает с результатом, полученным в п. 3^0.

Если предел упругости при предварительном растяжении полосы превзойден сравнительно немного, так что величина p имеет порядок 0,1—0,3, то при $\theta=54^0 45'$ $\left(\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ имеем

$$u^2=1-p^2\simeq 1$$

Таким образом, если элемент вырезан под углом $54^0 45'$ к направлению первоначального растяжения, то предел упругости практически оказывается тем же самым.

Поступила 3 июля 1954 г.
Киев.