Доклады Академии наук СССР
1957. Том 117, № 1

МЕХАНИКА

Академик АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ПРИМЕР БИФУРКАЦИИ, НЕ ПРИВОДЯЩЕЙ К ПОЯВЛЕНИЮ НЕУСТОЙЧИВЫХ ФОРМ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Существование одной или нескольких форм равновесия или стационарного движения механической системы, как правило, определяется конкретным значением некоторого параметра, существенно определяющего состояние системы. Таким параметром, например, в случае сжатия эйлеровой стойки (см. рис. 1*а*) является величина сжимающей силы P, а в случае плоского маятника, ось шарнира которого вращается в горизонтальной плоскости (см. рис. 1*б*), существенным параметром является значение угловой скорости вращения шарнира вокруг вертикальной оси ω.

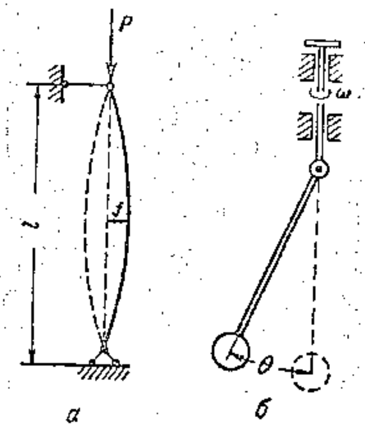


Рис. 1

Некоторому интервалу параметров может соответствовать единственная (основная) форма равновесия или стационарного движения. Например, прямолинейной форме эйлеровой стойки, как единственной форме равновесия, соответствует значение сжимающей силы P, находящееся в интервале

$$0 \leqslant P \leqslant P_e = \pi^2 EI / l^2. \qquad (1)$$

В случае же маятника стационарная форма движения, при которой центр тяжести маятника остается неподвижным, будет иметь место, если

$$0 \leqslant \omega^2 \leqslant \omega_{\text{кр}}^2 = mga / (A - C), \qquad (2)$$

где A — момент инерции маятника вокруг оси шарнира; C — момент инерции относительно прямой, перпендикулярной оси шарнира и проходящей через центр тяжести (линия маятника); m — масса маятника; a — расстояние между центром тяжести и осью шарнира.

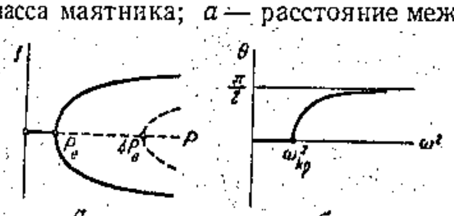


Рис. 2

Другим интервалам существенного параметра могут соответствовать, наряду с основной формой равновесия или стационарного движения, также и другие формы.

Для эйлеровой стойки при

$$P_e < P \leqslant 4P_e \qquad (3)$$

существует три формы равновесия: прямолинейная (основная) и две криволинейные, зеркально отображающие друг друга (рис. 1*а* и 2*а*).

В случае вращающегося маятника, если

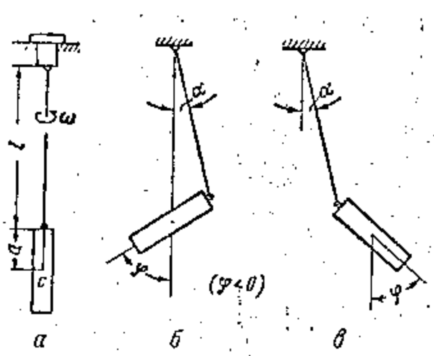
$$\omega > \omega_{\text{кр}} = \sqrt{mga / (A - C)}, \qquad (4)$$

то, наряду с основной формой (центр тяжести неподвижен и занимает наинизшее положение), возможна стационарная форма движения, при которой центр тяжести совершает коническое движение. При этом линия маятника отклоняется от вертикали на угол θ, определяемый соотношением *

$$\cos\theta = \frac{mga}{(A-C)\omega^2}. \tag{5}$$

Значения параметра, лежащие на границе существования одной или нескольких форм, называются, как известно, б и ф у р к а ц и о н н ы м и.

В ряде случаев, в частности, в приведенных выше примерах, новые формы равновесия стационарного движения развиваются из основной формы так, что малому отличию значения существенного параметра от его бифуркационного значения соответствует малое отклонение новых форм от исходной формы **. Происходит как бы разветвление основной формы на несколько форм равновесия или стационарного движения (рис. $2a$ и $2б$).



а *б* *в*

Рис. 3

Во всех случаях, известных автору настоящей статьи, вновь появляющиеся формы (по крайней мере одна из них) являются устойчивыми, в то время как основная форма равновесия или стационарного движения перестает быть устойчивой.

Ниже приводится пример, когда основная форма вместе с вновь появившимися формами стационарного движения остаются устойчивыми при любых значениях существенного параметра. Пример этот обнаружен в результате интересных экспериментов С. В. Малашенко по устойчивости вращения продолговатого осесимметрического твердого тела, подвешенного на струне (см. рис. $3a$). При некотором вполне определенном значении угловой скорости основная (вертикальная) форма стационарного вращения тела переставала быть устойчивой. Устойчивой формой стационарного движения становилась форма, изображенная на рис. $3б$, причем угол α, как и следовало ожидать, увеличивался по мере возрастания угловой скорости. Однако при сравнительно небольшом превышении значения угловой скорости над ее бифуркационным значением основная форма стационарного движения (струна вертикальна) вновь становится устойчивой.

При проведении экспериментов в вакууме получилось то же самое.

Однако при особо тщательной балансировке подвешенного цилиндрического тела, в частности, при подвесе тела на капроновой нити и медленном изменении скорости его вращения, можно было наблюдать основную форму при всех значениях угловой скорости.

Более поздние, тщательно проведенные опыты обнаружили в области меньших скоростей аналогичное явление. Как нетрудно было и предвидеть, новая форма динамического равновесия оказалась формой, изображенной на рис. $3в$.

Изложенное показывает, что здесь имеет место разветвление (бифуркация) форм динамического равновесия, однако без потери устойчивости основной формы ***.

Если считать нить абсолютно гибкой, а сопротивление вращению от-

* Кроме того, всегда существует при любом значении угловой скорости ω неустойчивая форма стационарного движения маятника, определяемая углом $\theta = \pi$. Эта форма является изолированной и в дальнейшем не рассматривается.

** В других случаях (хорошо известных в теории нелинейных колебаний) новые формы могут резко отличаться от основной, и непрерывный переход одной формы в другую оказывается невозможным ([1]).

*** Тем самым подвергается серьезным сомнениям возможность чисто гидродинамической трактовки потери устойчивости основной формы вращения твердого тела, подвешенного на струне, при наличии внутри тела полости, целиком наполненной жидкостью.

сутствующим, то подсчет бифуркационных значений угловой скорости приводит к рассмотрению уравнений

$$Ml^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \omega^2 - Mal \cos\alpha \sin\varphi\, \omega^2 = Mgl \sin\alpha,$$

$$Ma^2\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi - Mal\omega^2 \sin\alpha \cos\varphi + A\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi -$$

$$- C\omega^2 \cos\varphi \sin\varphi = Mga \sin\varphi \qquad (6)$$

относительно углов α и φ, определяющих форму стационарного движения.

Чтобы найти бифуркационные значения угловой скорости ω, следует в уравнениях (6) положить α и φ малыми и сохранить в них члены первого порядка малости относительно этих величин. Получим

$$(Ml^2\omega^2 - Mgl)\,\alpha - Mal\,\omega^2\varphi = 0,$$

$$- Mal\omega^2\alpha + [(A + Ma^2 - C)\,\omega^2 - Mga]\,\varphi = 0. \qquad (7)$$

При значении угловой скорости, равном угловой скорости бифуркации, эти уравнения должны допускать решение, отличное от тривиального

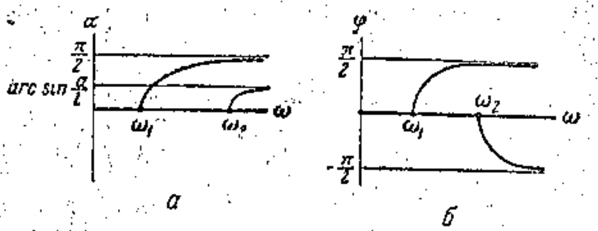


Рис. 4

$\alpha = 0$, $\varphi = 0$. При этом должен быть равен нулю детерминант системы (7). В результате приходим к уравнению относительно неизвестной ω^2

$$\omega^4 - \frac{g}{l}\left[l + \frac{Ma\,(l + a)}{A - C}\right]\omega^2 + \frac{Mga}{A - C}\,\frac{g}{l} = 0. \qquad (8)$$

Для продолговатого тела $A > C$. В этом случае два существенно отличных корня этого уравнения как раз и представляют собой бифуркационные значения угловой скорости. Сравнение расчетных числовых значений угловой скорости бифуркации с экспериментальными показало их согласие.

Исходные уравнения (6) позволяют найти углы α и φ как функции угловой скорости ω. Примерный график этих функций изображен на рис. 4*а* и 4*б*. Экспериментально замеренные величины углов α и φ также оказались в согласии с этими графиками.

Если тело таково, что $A < C$, то форма стационарного вращения, соответствующая рис. 3*б*, становится невозможной. Соответственно уравнение (8) имеет в этом случае один действительный положительный корень.

Строгое доказательство устойчивости основной формы стационарного вращения твердого тела, подвешенного на струне, методом Ляпунова — Чатаева было дано Е. П. Морозовой [2]. Исследованию теми же методами устойчивости форм стационнарного движения, появляющихся при разветвлении основной формы, посвящена статья М. Е. Темченко [3].

Институт математики
Академии наук СССР

Поступило
17 V 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Булгаков, Колебания, М., 1954. [2] Е. П. Морозов, Прикладн. матем. и мех., 20, в. 5 (1956). [3] М. Е. Темченко, ДАН, 117, № 1 (1957).