Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

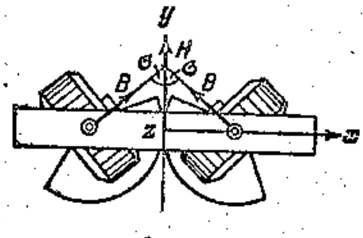
ОБ АВТОНОМНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА ПОСРЕДСТВОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО КОМПАСА, ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ И ИНТЕГРИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

А. Ю. Ишлинский

(Москва)

В статье [1] было рассмотрено теоретическое решение задачи об определении местоположения движущегося объекта посредством гироскопов, измерителей ускорения и интегрирующих устройств. Указанная там схема сочетания перечисленных элементов может подвергаться различным модификациям путем объединения функций отдельных ее частей в более сложных гироскопических системах. Ниже рассматривается один из подобных вариантов несколько иного решения упомянутой задачи. В нем используются свойства пространственного гироскопического компаса Геккелера, точная теория которого изложена в работе [2] [1]. Такой вариант решения задачи об автономном определении координат движущегося по земной сфере объекта требует для своего осуществления еще наличия гироскопа направления и устройства, интегрирующего совокупность трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Заметим, что математическая сторона вопроса остается при этом в общем почти такой же, как и в работе [1], и по структуре уравнений и по трудности их интегрирования.

1°. Приведем прежде всего основные свойства двухгироскопического чувствительного элемента [2] пространственного гирокомпаса (фиг. 1). Примем поверхность Земли за сферу, а поле ее тяготения будем считать центральным. Тогда при соблюдении определенных начальных условий, касающихся ориентации чувствительного элемента и величины угла 2σ между осями собственного вращения роторов гироскопов, прямая, соединяющая точку подвеса чувствительного элемента с его центром тяжести, постоянно проходит через центр земной сферы, по какому бы закону не перемещалась точка подвеса, оставаясь, однако, на ее поверхности. Далее, вектор суммы собственных кинетических моментов гироскопов чувствительного элемента H остается все время перпендикулярным к вектору скорости точки подвеса в ее движении относительно невращающейся



Фиг. 1

[1] Следует упомянуть работу [3], где посредством сложной гироскопической системы, содержащей также и гирокомпас, при помощи измерений гироскопических реакций решается по существу та же задача.

[2] А также чувствительный элемент двухгироскопической вертикали, описанной в [4].

сферы S с тем же центром и радиусом, что и земная сфера [1]. Наконец, величина этой скорости v оказывается связанной с половиной угла между осями собственного вращения роторов гироскопов чувствительного элемента пространственного компаса I соотношением

$$2B\cos\sigma = mav \tag{1}$$

где B — значение собственного кинетического момента каждого из гироскопов, m — масса всего чувствительного элемента и a — расстояние между его центром тяжести и точкой подвеса [2].

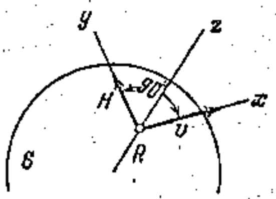
2°. Из перечисленных свойств пространственного гироскопического компаса между прочим следует, что при неподвижной, относительно земной сферы, точке подвеса чувствительного элемента вектор суммы собственных кинетических моментов его гироскопов H строго направлен на север.

Учитывая, что в данном случае

$$v = RU\cos\varphi \tag{2}$$

где φ — геоцентрическая широта места, R — радиус земной сферы и U — угловая скорость Земли, можно по углу 2σ между осями собственного вращения гироскопов, используя формулу (1), определить геоцентрическую широту φ.

Однако, если точка подвеса движется, то, пользуясь одним лишь гироскопом, определить направление меридиана и широту места невозможно; необходимо знать еще величину и направление скорости точки подвеса чувствительного элемента относительно земной сферы.



Фиг. 2

3°. Перейдем теперь к теоретическому рассмотрению упомянутого в начале настоящей статьи нового варианта решения проблемы об определении местоположения движущегося объекта. Свяжем с чувствительным элементом пространственного гироскопического компаса правую систему координат xyz с началом в точке его подвеса. Направим ось y этой системы координат по вектору суммы собственных кинетических моментов гироскопов H, а ось z — по прямой (фиг. 2), соединяющей центр тяжести чувствительного элемента с точкой его подвеса; направление оси x определится тем самым однозначно.

В соответствии с приведенными выше свойствами пространственного гирокомпаса ось x постоянно будет направлена по вектору v скорости

---

[1] Введение такой сферы, как бы «невращающейся Земли» представляет значительные удобства при изложении ряда вопросов теории гироскопов [см. [1, 2, 4—6]].

[2] Можно показать, что точно такими же свойствами обладает любое аналогичное двухгироскопическое устройство с иным расположением центра тяжести, чем в работах [[2, 4]]. При этом необходимо, чтобы: 1) центр тяжести его чувствительного элемента находился в плоскости, перпендикулярной к вектору суммарного собственного кинетического момента гироскопов и содержащей точку подвеса; 2) расстояние a от точки подвеса до центра тяжести должно быть таким же, как и в пространственном гирокомпасе Геккелера [[2]] или двухгироскопической вертикали [[4]].

точки подвеса относительно невращающейся сферы S, а ось z — по радиусу этой сферы или, что то же, по радиусу сферы Земли[1].

Обозначим через ω угловую скорость чувствительного элемента и, следовательно, системы координат xyz относительно невращающейся сферы S или, что то же, относительно некоей системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ с осями, ориентированными по неподвижным звездам.

Как нетрудно видеть (фиг. 2), проекции угловой скорости ω на оси xyz представляются соответственно выражениями

$$\omega_x = 0, \qquad \omega_y = \frac{v}{R}, \qquad \omega_z = \frac{v}{\rho_g} = \Omega(t). \tag{3}$$

Согласно этим выражениям проекция угловой скорости ω_x известна; она равна нулю. Проекцию ω_y можно также считать известной: для этого следует только непрерывно передавать информацию о значении угла 2σ между осями собственного вращения чувствительного элемента и воспользоваться соотношением (1).

Что же касается вертикальной (точнее, радиальной) составляющей угловой скорости чувствительного элемента ω_z, то она зависит также и от геодезического радиуса кривизны[2] траектории движения точки подвеса по невращающейся сфере S и, следовательно, является неизвестной функцией времени $\Omega(t)$.

4°. Введем так называемый географический трехгранник $\xi\eta\zeta$ с вершиной в точке подвеса чувствительного элемента гирокомпаса.

Ребро ζ этого трехгранника направим по радиусу земной сферы, ребро η — по касательной к меридиану места на север и ребро ξ — по касательной к параллели на восток.

Проекции угловой скорости u географического трехгранника относительно поступательно перемещающейся системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ на его собственные ребра ξ, η и ζ выражаются известными формулами [7]

$$u_\xi = -\frac{V_N}{R}, \quad u_\eta = \frac{V_E}{R} + U\cos\varphi, \qquad u_\zeta = \frac{V_E}{R}\operatorname{tg}\varphi + U\sin\varphi \tag{4}$$

Здесь φ — широта места[3], V_N и V_E — соответственно северная и восточная составляющие скорости точки подвеса чувствительного элемента относительно земной сферы.

Если воспользоваться [7] равенствами

$$V_N = \frac{d\varphi}{dt}R, \qquad V_E = R\cos\varphi\,\frac{d\lambda}{dt} \tag{5}$$

---

[1] Следует иметь в виду, что направление вертикали места (линий отвеса) совпадает с радиусом Земли лишь в точках ее экватора и на полюсах (отклонение достигает 7′ на широте 45°). Таким образом, плоскость xy в общем случае не является горизонтальной в обычном смысле этого слова. Ее можно назвать плоскостью геоцентрического горизонта.

[2] Геодезическая кривизна в данной точке кривой, расположенной на поверхности, равна кривизне в той же точке проекции этой кривой на плоскость, касающуюся в данной точке поверхности.

[3] Широта φ является здесь геоцентрической широтой данного места. Она отличается от географической на величину угла отклонения линии отвеса от радиуса Земли в силу вращения последней.

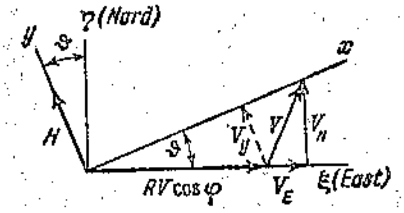
то формулы (4) преобразуются к виду

$$u_\xi = -\frac{d\varphi}{dt}, \qquad u_\eta = \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi, \qquad u_\zeta = \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\sin\varphi \tag{6}$$

где λ — долгота места.

5°. Обозначим через ϑ угол между осью x системы координат xyz, связанной с чувствительным элементом пространственного гирокомпаса и ребром ξ географического трехгранника $\xi\eta\zeta$. Нетрудно заметить, что с точностью до знака угол ϑ является углом так называемой скоростной девиации гирокомпаса [7]. Очевидно (фиг. 3), что

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{V_N}{RU\cos\varphi + V_E} \tag{7}$$



Фиг. 3

Заметим, что угол ϑ не может быть определен посредством одного только гирокомпаса, что собственно уже отмечалось в п. 2°. Вместо формулы (7) для определения угла ϑ может быть предложена следующая формула, более удобная для практического использования:

$$\sin\vartheta = \frac{V_y}{RU\cos\varphi} \tag{8}$$

Здесь V_y — проекция скорости V на направление вектора кинетического момента H (ось y). В морском деле для этой цели необходимы лаг и знание карты морских течений.

6°. Для дальнейшего существенно, что угловая скорость u географического трехгранника относительно невращающейся сферы S отличается от угловой скорости ω системы координат xyz, связанной с чувствительным элементом пространственного гирокомпаса лишь составляющей вдоль ребра ζ (или, что то же, оси z). Именно (фиг. 3)

$$\omega_z = u_z + \frac{d\vartheta}{dt} \tag{9}$$

В силу сделанного замечания имеют место соотношения

$$u_\xi = \omega_x\cos\vartheta - \omega_y\sin\vartheta, \qquad u_\eta = \omega_x\sin\vartheta + \omega_y\cos\vartheta, \qquad u_\zeta = \omega_z - \frac{d\vartheta}{dt} \tag{10}$$

Используя теперь формулы (3) и (6), получаем

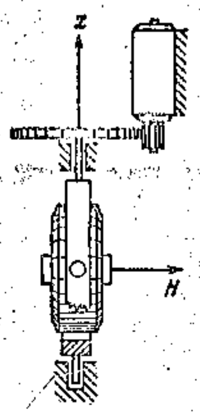
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}\sin\vartheta, \quad \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi = \frac{v}{R}\cos\vartheta, \quad \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\sin\varphi = \Omega(t) - \frac{d\vartheta}{dt} \tag{11}$$

Если бы $\Omega(t)$ была известной функцией времени, то соотношения (11) представляли бы собой совокупность трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех искомых функций φ, λ и ϑ.

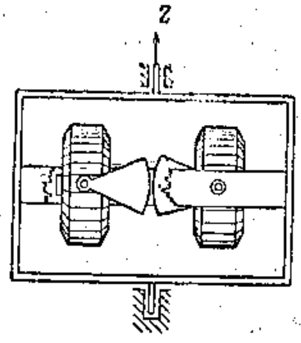
7°. Для определения функции $\Omega(t)$ необходимо наличие гироскопа направления (фиг. 4) или какого-либо другого, например двухгироскопного гироазимута (фиг. 5). Можно воспользоваться текущим значением угла α между осью x, связанной с чувствительным элементом, и нормалью ν к плоскости внешнего кольца гироскопа направления (фиг. 6).

При отсутствии трения в оси кожуха гироскопа направления и при равенстве нулю момента разбалансировки системы кожух — ротор вокруг той же оси проекция угловой скорости внешнего кольца подвеса гироскопа на ось этого кольца равна нулю, как бы не перемещалось основание гироскопа направления.

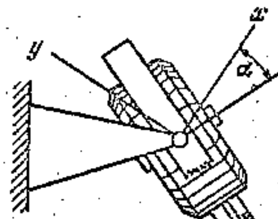
В отличие от свободного гироскопа ось собственного вращения гироскопа направления посредством специально создаваемого момента вокруг оси внешнего кольца непрерывно приводится в плоскость, перпендикуляр-



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

ную плоскости внешнего кольца. Для нашей цели ось внешнего кольца гироскопа направления должна совпадать с радиусом Земли, на котором находится точка подвеса чувствительного элемента пространственного гирокомпаса. Это можно осуществить при помощи специальных следящих систем, связывающих чувствительный элемент пространственного гирокомпаса с основанием гироскопа направления. В таком случае угловая скорость чувствительного элемента будет отличаться от угловой скорости внешнего кольца гироскопа направления лишь на составляющую вдоль оси z, т. е. вдоль радиуса Земли. В результате немедленно получаем, что

$$\omega_z = \Omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} \tag{12}$$

и функция $\Omega(t) = \omega_z$ оказывается известной.

8°. Несколько преобразуя совокупность дифференциальных уравнений (11), можно представить их теперь в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}\sin\vartheta, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{v}{R}\cos\vartheta\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{v}{R}\frac{\cos\vartheta}{\cos\varphi} - U \tag{13}$$

разрешенном относительно производных искомых функций φ, ϑ и λ.

Первые два дифференциальных уравнения этой совокупности интегрируются независимо от третьего, и, следовательно, при учете начального значения функций φ и ϑ соответствующее интегрирующее устройство будет вырабатывать непрерывно широту места и скоростную поправку к гирокомпасу, давая тем самым возможность получить направление меридиана места без знания скорости движения точки подвеса относительно земной сферы.

Если φ и ϑ уже найдены, то последнее из уравнений (13) после простой квадратуры дает возможность определить долготу места λ (также при учете ее начального значения).

Тем самым поставленная задача об автономном определении координат движущегося объекта оказывается решенной.

9°. Следует остановиться на случае, когда начальные условия, при соблюдении которых пространственный гирокомпас следует законам, изложенным в 1°, соблюдены не совсем точно. Тогда, как было показано [2], чувствительный элемент гироскопического компаса будет совершать малые колебания относительно осей естественного трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$, связанного со сферической траекторией точки подвеса. Ребро x° этого трехгранника направлено по скорости v точки подвеса относительно невращающейся сферы S, ребро z° — по радиусу Земли; положение ребра y° определяется тем самым полностью.

Кроме того, угол 2ε между осями собственного вращения гироскопов чувствительного элемента также будет совершать малые колебания около значения 2σ, определяемого равенством (1). Все эти колебания с большой точностью могут быть представлены посредством суперпозиции двух простых гармонических колебаний с частотами, отличающимися от так называемой частоты Шуллера $\sqrt{g/R} = 0.00124065$ сек$^{-1}$, в большую и меньшую сторону, на величину вертикальной составляющей угловой скорости Земли, т. е. $U \sin\varphi$ (отличие от Геккелера [8], ошибочно предполагавшего эти частоты равными частоте Шуллера).

Можно показать, что колебание оси z, связанной с чувствительным элементом пространственного гирокомпаса, оказывает малое влияние на искажения угла α. Однако вращательные колебания чувствительного элемента вокруг оси z сказываются на значении угла α в полной мере.

Таким образом, на интегрирующие устройства будут теперь вводиться не истинные значения $\Omega(t)$ и v, а данные, определяемые фактическим углом разведения гироскопов, пространственного гирокомпаса в соответствии с формулой (1), и текущий угол между компасом и гироазимутом. Оценка возникающих при этом ошибок в определении координат места движущегося объекта посредством интегрирования уравнений (10) представляет для практики важную задачу, которая может стать предметом отдельного исследования.

Поступила 5 IX 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Определение местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. ПММ, т. XXI, вып. 6, 1957.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
3. Fox Charles. The mechanical determination of position and velocity on the earth's surface. Proceedings of the cambridge philosophical society, vol. 45, pt. 2, 1948.
4. Ишлинский А. Ю. Теория двухгироскопической вертикали. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
5. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
6. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
7. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.
8. Geckeler J. W. Kreiselmechanik des Anschütz-Raumkompasses. Ingenieur — Archiv, t. VI, B. 4, Berlin, 1935.