

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПРЕЦЕССИОННОЙ ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ В ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ ТОЧКИ В КАРТИННОЙ ПЛОСКОСТИ

А. Ю. Ишлинский

(Москва)

В статье строго обосновываются уравнения движения гироскопов в форме уравнений так называемой изображающей точки в некоторой плоскости, называемой также картинной или фазовой. Оказывается, что эти общеизвестные уравнения [1, 2, 3] справедливы лишь при довольно больших ограничениях, касающихся сил, действующих на гироскоп.

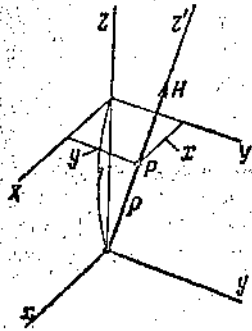
1°. Изображающая точка (полюс) гироскопа и картинная плоскость вводятся обычно следующим образом. Выбирается некоторая система координат xuz с началом в центре карданова подвеса гироскопа. Ось z этой системы направляется так, чтобы угол между нею и осью собственного вращения ротора гироскопа z' или, что то же, вектором его собственного кинетического момента H был малым (фиг. 1). Ориентация системы координат xuz в любое мгновение времени предполагается известной. В частности, считаются известными функциями времени проекции ω_x , ω_y и ω_z на оси x , y и z угловой скорости этой системы относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ с осями, не меняющими своей ориентации относительно направлений на неподвижные звезды. Направления осей x и y выбираются так, чтобы выражения проекций на них угловой скорости системы координат xuz по отношению к системе $\xi^*\eta^*\zeta^*$ имели возможно более простой вид. Например, в случае гировертикали за систему координат xuz в ряде случаев удобно взять так называемую географическую систему, направив ось z по вертикали места, а оси x и y — соответственно на Восток и на Север. В случае же гироскопа можно использовать ту же систему координат, но за ось z принять направление на Север. В ряде теоретических вопросов (например, для гиригоризонткомаса, см. [4]) удобна система координат $x^\circ y^\circ z^\circ$, ось x° которой направлена по вектору скорости точки подвеса гироскопической системы относительно некоторой неврещающейся сферы S , имеющей тот же центр и тот же радиус, что и Земля, а ось z° — по радиусу этой сферы и т. д.

Плоскость XU , отстоящая от центра подвеса гироскопа на расстоянии, равном единице, и параллельная координатной плоскости xu (фиг. 1), называется в теории гироскопов картинной или фазовой (ее уравнение $z = 1$). Точка P пересечения с этой плоскостью вектора собственного кинетического момента гироскопа H и, следовательно, оси собственного вращения его ротора z' называется в свою очередь изображающей точкой или полюсом гироскопа.

Проекции на оси x , y и z скорости изображающей точки относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (начало этой системы предполагается расположенным также в центре подвеса гироскопа) выражаются следующими формулами:

$$v_x = \frac{dx}{dt} + \omega_y - y\omega_z, \quad v_y = \frac{dy}{dt} - \omega_x + x\omega_z, \quad v_z = y\omega_x - x\omega_y \quad (1)$$

Здесь x и y — координаты изображающей точки P (ее координата z постоянна и равна единице).



Фиг. 1

Уравнения движения изображающей точки соответствующие прецессионной (элементарной) теории гироскопов, представляются обычно в виде

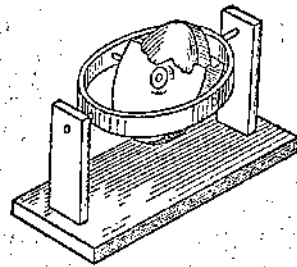
$$Hv_x = M_x, \quad Hv_y = M_y \quad (2)$$

В этих уравнениях, строго говоря, величины M_x и M_y нельзя, как это часто делается, считать равными суммам моментов сил, действующих на гироскоп, соответственно относительно осей x и y . Гироскоп представляет собой механическую систему трех тел: ротора, внутреннего кольца карданова подвеса (или, что то же в кинематическом отношении,

кожуха) и внешнего кольца подвеса (фиг. 2). Поэтому при составлении уравнений движения гироскопа следует строго различать, к какому из перечисленных тел и каким образом соответствующие силы приложены. В противном случае неизбежны ошибки¹.

Задача дальнейшего изложения состоит в том чтобы выяснить, в каком смысле следует понимать правые части уравнений (2), уточнить самые уравнения и перечислить условия, при выполнении которых они справедливы.

2°. Для разрешения поставленных вопросов потребуются строгие уравнения прецессионного движения гироскопа в кардановом подвесе. Имея в виду вывод этих уравнений посредством принципа виртуальных скоростей [5], приведем предварительно некоторые кинематические соотношения.



Фиг. 2

Введем три новые системы координат $\xi\eta\zeta$, $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $x'y'z'$ с началом в центре подвеса гироскопа, как и у систем $\xi^*\eta^*\zeta^*$ и xyz (фиг. 3). Систему координат $\xi\eta\zeta$ свяжем с объектом, на котором расположен гироскоп, причем ось ξ направим по оси внешнего кольца его карданова подвеса. По ней же направим ось ξ_1 системы координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$; последнюю свяжем с внешним кольцом, направив ее ось η_1 по оси внутреннего кольца подвеса (кожуха).

Наконец, систему координат $x'y'z'$ свяжем с внутренним кольцом подвеса (кожухом) так, чтобы ее ось y' совпадала с осью η_1 , а ось z'

¹ Одна из возможных ошибок подобного рода приведена в [6].

была направлена, как и выше, по оси собственного вращения ротора гироскопа (фиг. 4), т. е. по вектору его собственного кинетического момента H .

Обозначим далее через α угол поворота внешнего кольца относительно объекта и через β — внутреннего кольца (кожуха) относительно внешнего. Условимся, что при угле α , равном нулю, оси систем координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $\xi\eta\zeta$ соответственно совпадают, а при его возрастании внешнее кольцо поворачивается относительно объекта против стрелки часов, если наблюдать за вращением со стороны положительной части совпадающих осей ξ и ξ_1 . Аналогично примем, что при равном нулю угле β соответственно совпадают оси систем координат $x'y'z'$ и $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и при возрастании этого угла внутреннее кольцо (кожух) вращается против стрелки часов относительно внешнего кольца подвеса при наблюдении со стороны положительной части оси y' или, что то же, оси η_1 .

Угловую скорость объекта относительно системы координат $\xi\eta\zeta$, т. е. относительно направлений на неподвижные звезды, обозначим через ω , а ее проекции на оси ξ , η и ζ — соответственно через u_ξ , u_η и u_ζ .

Нетрудно убедиться (фиг. 5), что проекции угловой скорости ω внешнего кольца подвеса относительно той же системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ на оси координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$, связанной с кольцом, выражаются формулами

$$\begin{aligned} \omega_{\xi_1}^1 &= u_\xi + \frac{d\alpha}{dt}, & \omega_{\eta_1}^1 &= u_\eta \cos \alpha + u_\zeta \sin \alpha, \\ \omega_{\zeta_1}^1 &= -u_\eta \sin \alpha + u_\zeta \cos \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично можно получить следующие формулы для проекций на оси x' , y' и z' , связанные с внутренним кольцом (кожухом), угловой скорости этого кольца относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (фиг. 6):

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \left(u_\xi + \frac{d\alpha}{dt}\right) \cos \beta - (-u_\eta \sin \alpha + u_\zeta \cos \alpha) \sin \beta \\ \omega_{y'} &= u_\eta \cos \alpha + u_\zeta \sin \alpha + \frac{d\beta}{dt} \\ \omega_{z'} &= \left(u_\xi + \frac{d\alpha}{dt}\right) \sin \beta + (-u_\eta \sin \alpha + u_\zeta \cos \alpha) \cos \beta \end{aligned} \quad (4)$$

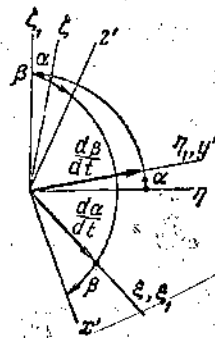
Наконец, проекции угловой скорости ω ротора гироскопа относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ на те же оси x' , y' и z' представляются формулами

$$\omega_{x'} = \omega_{x'}', \quad \omega_{y'} = \omega_{y'}', \quad \omega_{z'} = \omega_{z'}' + \frac{d\varphi}{dt} \quad (5)$$

где φ — угол поворота против стрелки часов ротора гироскопа относительно внутреннего кольца (кожуха).

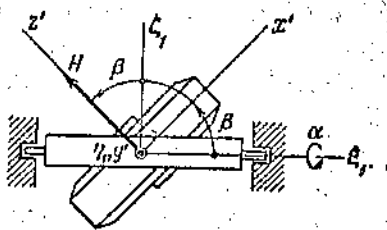
3°. Рассмотрим кинестатику гироскопа в системе координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Как уже упоминалось выше, гироскоп является механической системой, в состав которой входят три тела: внешнее кольцо карданова подвеса, внутреннее кольцо (кожух) и ротор (фиг. 2).

В прецессионной (элементарной) теории гироскопов кинетические моменты обоих колец не учитываются вовсе, а за кинетический момент ротора принимается его собственный кинетический момент H . Последний является вектором, направленным по оси собственного вращения ротора z' .

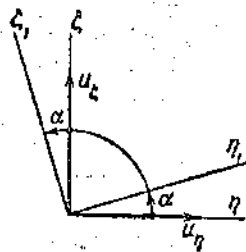


Фиг. 3

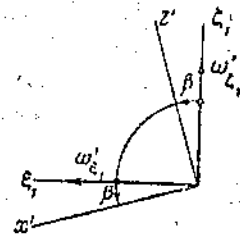
Его модуль примем равным произведению момента инерции ротора относительно оси z' на величину собственной угловой скорости ротора $d\varphi/dt$. Следовательно, в соответствии с прецессионной теорией гироскопов даламберовы силы инерции¹ в системе координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ должны определяться только изменением в этой системе вектора собственного кинетического



Фиг. 4



Фиг. 5

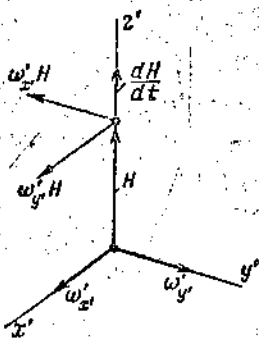


Фиг. 6

момента H . Проекции на оси x', y' и z' скорости относительно системы координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ конца этого вектора (начало вектора H и начало системы $\xi^* \eta^* \zeta^*$ совпадают) представляются выражениями (Фиг. 7)

$$\dot{\xi} H = -G_x, \quad -\dot{\eta} H = -G_y, \quad \frac{dH}{dt} = -G_z \quad (6)$$

Поэтому при рассмотрении кинестатики механической системы гироскопа к числу действующих на нее сил следует добавить пары с моментами G_x, G_y и G_z , приложенные к ротору гироскопа; формулы для этих моментов были только что приведены выше.



Фиг. 7

Силы, действующие на эту систему, могут быть разделены на силы сторонние (и силы взаимодействия между ротором и внутренним кольцом подвеса, внутренним кольцом и внешним и, наконец, между внешним кольцом и основанием гироскопа).

В состав сторонних сил должны быть включены кориолисовы силы инерции и силы инерции переносного движения, обусловленные перемещением системы координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ [относительно так называемой абсолютной системы координат с началом в центре масс солнечной системы и с осями, не меняющими своей ориентации относительно направлений на неподвижные звезды. Система координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ не вращается, поэтому кориолисовы силы инерции отсутствуют.

Вследствие поступательного перемещения системы координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ все силы инерции переносного движения, действующие на отдельные элементы механической системы, параллельны друг другу. Все они имеют направление, противоположное ускорению начала системы координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ относительно абсолютной системы. Очевидно, что совокупность

¹ Элементарная даламберова сила инерции — вектор, направленный в сторону, противоположную ускорению рассматриваемого элемента массы, относительно расчетной системы координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$, численно равный произведению этого ускорения на величину массы.

сил и
механи
проход
произв
другой
Сист
состоя
направ
с силой
Если
телами
На
под де
должна
свобод
следует
естестве
кардан
только
Соб
соответ

Сост
кольца
формул

Исп
проект
внутре

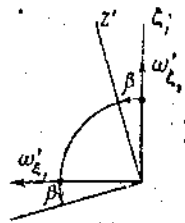
Нак
соглас

Сост
всех
пары

+ l_x \dot{\omega}_x

Зде
сил воз
сумма

ротора отно-
ротора $d\varphi/dt$.
ий гироскопов
ы определять-
книстического



Фиг. 6.

ельно системы
H и начало
иг. 7)

G_x (6)

системы гиро-
на с моментами
тору гироско-
были только

систему, могут
эти силы вза-
гнешним коль-
и внешним и,
и основанием

и быть исклю-
и силы инерции
ые перемеще-
лой абсолютной
емь и с осями,
ний на непод-
коэтому корню-

ординат $\xi^*\eta^*\zeta^*$
на отдельные
дугу. Все они
системы коорди-
о совокупность

ный в сторону,
относительно рас-
этого ускорения

сил инерции переносного движения, действующих на отдельное тело механической системы, приводится в данном случае к равнодействующей, проходящей через его центр тяжести. Величина равнодействующей равна произведению массы тела на ускорение начала (а, следовательно, и любой другой точки) системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$.

Силы взаимодействия между телами механической системы гироскопа состоят из сил нормальных реакций связей и из пар, векторы которых направлены по осям, связывающим эти тела. Точно так же обстоит дело с силами взаимодействия между основанием и внешним кольцом подвеса. Если имеются еще силы взаимодействия между основанием и другими телами системы, то их можно отнести к сторонним силам.

На основании принципа Даламбера механическая система гироскопа под действием всех перечисленных сил вместе с парами G_x , G_y и G_z должна находиться в состоянии равновесия. Она имеет три степени свободы; движение основания относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ следует считать заданным. За обобщенные координаты системы наиболее естественно принять углы α , β и φ , т. е. углы поворота внешнего кольца карданова подвеса относительно основания, внутреннего кольца относительно внешнего и ротора относительно внутреннего кольца.

Сообщим виртуальные скорости элементам механической системы, соответствующие виртуальным обобщенным скоростям:

$$\delta(dx/dt), \quad \delta(d\beta/dt), \quad \delta(d\varphi/dt)$$

Соответствующие им проекции виртуальной угловой скорости внешнего кольца на оси связанной с ним системы координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ на основании формул (3) имеют вид

$$\delta\omega_{\xi_1}^1 = \delta(dx/dt), \quad \delta\omega_{\eta_1}^1 = 0, \quad \delta\omega_{\zeta_1}^1 = 0 \quad (7)$$

Используя формулы (4), получаем далее следующие выражения для проекций на оси системы координат $x'y'z'$ виртуальной угловой скорости внутреннего кольца подвеса (кожуха)

$$\delta\omega_{x'} = \delta \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta, \quad \delta\omega_{y'} = \delta \frac{d\beta}{dt}, \quad \delta\omega_{z'} = \delta \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta \quad (8)$$

Наконец, для проекций на те же оси виртуальной скорости ротора согласно формулам (5) и (4) получаем выражения

$$\delta\omega_{x''} = \delta \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta, \quad \delta\omega_{y''} = \delta \frac{d\beta}{dt}, \quad \delta\omega_{z''} = \delta \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \delta \frac{d\varphi}{dt} \quad (9)$$

Составим теперь выражение для виртуальной мощности δW совокупности всех сил, приложенных к механической системе гироскопа, включая пары G_x , G_y и G_z . Имеем

$$\delta W = (m_{x'} + G_x) \delta\omega_{x'} + (m_{y'} + G_y) \delta\omega_{y'} + (m_{z'} + G_z) \delta\omega_{z'} + \\ + L_x \delta\omega_{x''} + L_y \delta\omega_{y''} + L_z \delta\omega_{z''} + K_{\xi_1} \delta\omega_{\xi_1}^1 + M_x \delta \frac{d\varphi}{dt} + L_y \delta \frac{d\beta}{dt} + K_{\xi_1} \delta \frac{d\alpha}{dt} \quad (10)$$

Здесь K_{ξ_1} — сумма моментов относительно оси внешнего кольца ξ_1 (ξ) сил воздействия основания гироскопа на это кольцо; L_y — аналогичная сумма моментов сил воздействия внешнего кольца на внутреннее отно-

нительно оси внутреннего кольца y' (η_1), M_z' — сумма моментов воздействия внутреннего кольца на ротор относительно его оси собственного вращения z' . Далее через k , l и m с подстрочными индексами обозначены суммы моментов сторонних сил, действующих соответственно на внешнее кольцо подвеса, его внутреннее кольцо (кожух) и ротор, относительно осей, указанных в этих индексах.

В выражении виртуальной мощности δW , естественно, не вошли силы нормальных реакций связей, так как они никакой мощности не развивают.

Заменим теперь в формулу для δW проекции виртуальных угловых скоростей их выражениями согласно формулам (7), (8) и (9). Получим

$$\delta W = [K_{\xi_1} + k_{\xi_1} + (l_{x'} + m_{x'} + G_{x'}) \cos \beta + (l_{z'} + m_{z'} + G_{z'}) \sin \beta] \delta \frac{d\alpha}{dt} + (l_{y'} + m_{y'} + G_{y'} + L_{y'}) \delta \frac{d\beta}{dt} + (m_{z'} + G_{z'} + M_{z'}) \delta \frac{d\varphi}{dt} \quad (11)$$

В силу принципа виртуальных скоростей мощность δW должна быть равна нулю при любых виртуальных скоростях, согласных со связями, т. е. при произвольных значениях виртуальных обобщенных скоростей $\delta(dx/dt)$, $\delta(d\beta/dt)$ и $\delta(d\varphi/dt)$, что возможно лишь при равенстве нулю порожек каждого из множителей перед этими скоростями в выражении (11). В результате получаем соотношения

$$K_{\xi_1} + k_{\xi_1} + (l_{x'} + m_{x'} + G_{x'}) \cos \beta + (l_{z'} + m_{z'} + G_{z'}) \sin \beta = 0 \\ L_{y'} + l_{y'} + m_{y'} + G_{y'} = 0, \quad M_{z'} + m_{z'} + G_{z'} = 0 \quad (12)$$

которые после замены в них величин $G_{x'}$, $G_{y'}$ и $G_{z'}$ их выражениями согласно равенствам (6) и исключения из первого соотношения одной группы членов посредством использования третьего соотношения приводятся к виду

$$\omega_{y'} H = m_{x'} + l_{x'} + (K_{\xi_1} + k_{\xi_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta \\ - \omega_{z'} H = m_{y'} + l_{y'} + L_{y'}, \quad dH/dt = m_{z'} + M_{z'} \quad (13)$$

Соотношения (13) являются уравнениями процессного движения гироскопа в кардановом подвесе¹.

4°. Чтобы перейти к уравнениям движения изображающей точки, преобразуем сначала первые два уравнения (13). Изображающая точка находится на оси z' на переменном расстоянии ρ от начала систем координат $x'y'z'$ и xyz . Очевидно, что проекции ее скорости относительно системы координат $\xi^*\eta^*z^*$ на оси x' , y' и z' выражаются формулами

$$v_{x'} = \omega_{y'} \rho, \quad v_{y'} = -\omega_{z'} \rho, \quad v_{z'} = d\rho/dt \quad (14)$$

Используя эти формулы, можно первые два уравнения (13) представить в виде

$$H \frac{v_{x'}}{\rho} = m_{x'} + l_{x'} + (K_{\xi_1} + k_{\xi_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta, \\ H \frac{v_{y'}}{\rho} = m_{y'} + l_{y'} + L_{y'} \quad (15)$$

¹ Ср. вывод тех же уравнений в [9] методом элементарной статистики.

Проекция $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$ скорости изображающей точки на оси системы координат $x'y'z'$ и проекции той же скорости v_x , v_y и v_z на оси системы xyz связаны равенствами

$$\begin{aligned} v_x &= av_{x'} + bv_{y'} + cv_{z'} \\ v_y &= a'v_{x'} + b'v_{y'} + c'v_{z'} \\ v_z &= a''v_{x'} + b''v_{y'} + c''v_{z'} \end{aligned} \quad (16)$$

| | | | |
|-----|-------|-------|-------|
| | x' | y' | z' |
| x | a | b | c |
| y | a' | b' | c' |
| z | a'' | b'' | c'' |

в состав которых входят косинусы углов между осями систем координат $x'y'z'$ и xyz согласно таблице (17) справа.

Подставим в правые части равенств (16) выражения для величин $v_{x'}$ и $v_{y'}$, которые следуют из уравнений (15), а также для $v_{z'}$ согласно третьей из формул (14). Получим в результате

$$H \frac{v_x}{\rho} = a(m_{x'} + l_{x'}) + b(m_{y'} + l_{y'}) + a[(K_{\xi_1} + k_{\xi_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta] + bL_{y'} + \frac{cH}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

$$H \frac{v_y}{\rho} = a'(m_{x'} + l_{x'}) + b'(m_{y'} + l_{y'}) + a'[(K_{\xi_1} + k_{\xi_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta] + b'L_{y'} + \frac{c'H}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (18)$$

$$H \frac{v_z}{\rho} = a''(m_{x'} + l_{x'}) + b''(m_{y'} + l_{y'}) + a''[(K_{\xi_1} + k_{\xi_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta] + b''L_{y'} + \frac{c''H}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

Третье из соотношений (18) является следствием первых двух. В этом нетрудно убедиться, сложив отдельно правые и левые части всех этих соотношений, предварительно умножив их соответственно на косинусы c , c' и c'' , и далее воспользоваться известными соотношениями между косинусами таблицы (17), равенством

$$v_{z'} = cv_x + c'v_y + c''v_z \quad (19)$$

и третьей из формул (14).

Заметим, что аналогично равенствам (16) следует

$$\begin{aligned} a(m_{x'} + l_{x'}) + b(m_{y'} + l_{y'}) + c(m_{z'} + l_{z'}) &= m_x + l_x \\ a'(m_{x'} + l_{x'}) + b'(m_{y'} + l_{y'}) + c'(m_{z'} + l_{z'}) &= m_y + l_y \\ a''(m_{x'} + l_{x'}) + b''(m_{y'} + l_{y'}) + c''(m_{z'} + l_{z'}) &= m_z + l_z \end{aligned} \quad (20)$$

где m_x , m_y , m_z и l_x , l_y , l_z — суммы моментов относительно соответствующих осей сторонних сил, действующих на ротор гироскопа и на внутреннее кольцо его подвеса (кожух).

Используя равенства (20), первые два соотношения (18) можно представить в виде

$$H \frac{v_x}{\rho} = m_x + l_x + a [(K_{z_1} + k_{z_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta] + bL_{y'} + c \left(H \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - m_{z'} - l_{z'} \right) \quad (21)$$

$$H \frac{v_y}{\rho} = m_y + l_y + a' [(K_{z_1} + k_{z_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta] + b'L_{y'} + c' \left(H \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - m_{z'} - l_{z'} \right)$$

Только что полученные соотношения представляют собой строгие уравнения движения изображающей точки в картинной плоскости.

Они должны быть дополнены уравнениями, связывающими косинусы a, b, a' и b' как с параметрами, характеризующими ориентацию движущегося объекта (системы координат $\xi\eta\xi'$) относительно системы координат xyz , так и с самими координатами x и y изображающей точки в этой системе. Кроме того, должны быть учтены первые две формулы (1) и очевидные формулы

$$x = \rho \cos z'x = \rho c, \quad y = \rho \cos z'y = \rho c' \quad (22)$$

$$\rho = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \quad (23)$$

5°. Уравнения (21) допускают значительные упрощения, если координаты изображающей точки x и y и их производные по времени считать малыми величинами и пренебрегать квадратами и произведениями этих величин. В частности, в силу формулы (23) величина ρ заменяется единицей и отпадают члены, содержащие производную ρ по времени.

Кроме того, согласно формулам (22) с точностью до малых второго порядка получим

$$c = x, \quad c' = y \quad (24)$$

Далее согласно соотношениям между косинусами углов таблицы (17)

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \quad (25)$$

с той же точностью имеем

$$c''^2 = 1 - x^2 - y^2, \quad c'' = 1 - \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad a''^2 + b''^2 = x^2 + y^2 \quad (26)$$

Отсюда следует, что косинусы a'' и b'' имеют в общем случае первый порядок малости, а косинус c'' отличается от единицы на малую более высокого порядка. Учитывая сделанные замечания и соотношение

$$m_{z'} + l_{z'} = c(m_x + l_x) + c'(m_y + l_y) + c''(m_z + l_z) \quad (27)$$

можно, не нарушая принятой точности вычислений, заменить в уравнениях (21) сумму моментов $m_{z'}$ и $l_{z'}$ соответственно на $m_z + l_z$.

Используя далее формулы (1) и (24), получим в результате дифференциальные уравнения движения изображающей точки в виде

$$H \left(\frac{dx}{dt} + \omega_y - y\omega_z \right) = m_x + l_x - x(m_z + l_z) + a [(K_{z_1} + k_{z_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta] + bL_{y'}$$

$$H \left(\frac{dy}{dt} - \omega_x + x\omega_z \right) = m_y + l_y - y(m_z + l_z) + a' [(K_{z_1} + k_{z_1}) \sec \beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg} \beta] + b'L_{y'} \quad (28)$$

Косинусы a , b , a' и b' углов между осями x' , y' и x , y в случае малых значений координат x и y также могут быть представлены в сравнительно простом виде. Они выражаются в явном виде через углы α и β и угол γ между осями y' и y (курс объекта, если ось y направлена на Север).

6°. Заметим, наконец, что уравнения (2) получаются из строгих уравнений (21) при следующих дополнительных предположениях: 1) полностью отсутствует сумма моментов K_{ξ_1} сил взаимодействия между основанием и внешним кольцом подвеса относительно оси этого кольца ξ_1 (ξ), в частности, не должно быть трения в этой оси; должны отсутствовать аналогичные моменты $L_{y'}$ и $M_{z'}$ сил взаимодействия внутреннего кольца (кожуха) с внешним кольцом и с ротором гироскопа; 2) отсутствует сумма моментов k_{ξ_1} относительно оси ξ_1 (ξ) сторонних сил, действующих на внешнее кольцо (практически это слодится к требованию точной балансировки этого кольца); 3) отсутствуют также моменты $m_{z'}$ и $l_{z'}$ сторонних сил, действующих на внутреннее кольцо и на ротор относительно оси собственного вращения ротора z' ; 4) координаты x и y изображающей точки являются малыми величинами.

Действительно, если в уравнениях (21) положить

$$K_{\xi_1} = L_{y'} = M_{z'} = 0, \quad k_{\xi_1} = m_{z'} = l_{z'} = 0 \quad (29)$$

и, кроме того, в силу формулы (23) принять величину ρ равной единице, то приходим к уравнениям

$$Hv_x = m_x + l_x, \quad Hv_y = m_y + l_y \quad (30)$$

которые совпадают с уравнениями (2), если принять за моменты M_x и M_y в этих уравнениях суммы моментов $m_x + l_x$ и $m_y + l_y$ сторонних сил, действующих на механическую систему: ротор — внутреннее кольцо (кожух) гироскопа.

Тем самым полностью выяснены условия, при выполнении которых справедливы известные уравнения (2) прецессионной теории гироскопов в форме уравнений движения изображающей точки в картинной плоскости и смысл, в котором надо понимать отдельные члены этих уравнений.

Представляется также возможным учет влияния на движение оси собственного вращения гироскопа моментов K_{ξ_1} , $L_{y'}$, $M_{z'}$, k_{ξ_1} , $m_{z'}$, $l_{z'}$ посредством привлечения уравнений в форме (21) или (28).

Поступила 13 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.
2. Николай Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.
3. Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем. Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
4. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
5. Суслев Г. К. Теоретическая механика, ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.
6. Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.