

УДК 539.3

## Критерий разрушения при сверхмногоцикловой усталости с определением критической плоскости

Н. Г. Бураго<sup>1</sup>, А. Д. Никитин<sup>2,3</sup>, И. С. Никитин<sup>2,3</sup>, В. Л. Якушев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, Проспект Вернадского, 101 к.1.

<sup>2</sup> Институт автоматизации проектирования РАН, Россия, 123056, Москва, 2-ая Брестская ул, д.19/18.

<sup>3</sup> «МАИ» - Национальный Исследовательский Университет, Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

### Аннотация

Предлагается обобщение критерия разрушения для режима сверхмногоцикловой усталости с учетом критической плоскости усталостных повреждений для многоосного напряженного состояния.

**Ключевые слова:** циклическое нагружение, усталостное разрушение, сверхмногоцикловая усталость, критическая плоскость.

**Введение.** Современные подходы к построению многоосных критериев усталостного разрушения часто используют понятие критической плоскости. Первый критерий с определением критической плоскости был предложен Финдли [1]. Согласно этому критерию разрушение происходит по плоскости с нормалью  $n$  с компонентами  $n_k$  при выполнении условия:

$$(\Delta\tau_n/2 + \alpha\sigma_n)_{MAX_n} = S_F + A_F N^{\beta_F}, \quad \sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau_n = |\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}|$$

где  $\beta_F < 0$ ,  $\alpha$ ,  $S_F$ ,  $A_F$  – параметры, определяемые по данным эксперимента,  $N$  – число циклов до разрушения.

В настоящее время установлено, что относительно небольшие циклические напряжения (меньшие классического предела усталости материала), действующие с высокой частотой (порядка 1 кГц и выше) могут приводить к

### Образец для цитирования

Бураго Н. Г., Никитин А. Д., Никитин И. С., Якушев В. Л. Критерий разрушения при сверхмногоцикловой усталости с определением критической плоскости / *Материалы X Всероссийской научной конференции по механике деформируемого твердого тела* (18–22 сентября 2017 г., Самара, Россия). Самара: СамГТУ, 2017. С. 1–х.

### Сведения об авторах

Николай Георгиевич Бураго <http://orcid.org/0000-0002-1806-9386>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в МДТТ ИПМех РАН; e-mail: [buragong@yandex.ru](mailto:buragong@yandex.ru)

Александр Дмитриевич Никитин <http://orcid.org/0000-0002-2916-758X>

кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; отдел моделирования ИАП РАН; e-mail: [nikitin\\_alex@bk.ru](mailto:nikitin_alex@bk.ru)

Илья Степанович Никитин <http://orcid.org/0000-0003-3499-6910>

доктор физико-математических наук, профессор; директор; ИАП РАН; e-mail: [i\\_nikitin@list.ru](mailto:i_nikitin@list.ru)

Владимир Лаврентьевич Якушев <http://orcid.org/0000-0002-9364-1194>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; отдел моделирования ИАП РАН; e-mail: [yakushev@icad.org.ru](mailto:yakushev@icad.org.ru)

разрушению конструкций [2]. Высокочастотное нагружение приводит к значительным наработкам ( $N \approx 10^9 - 10^{10}$  циклов) за время расчетного срока службы изделия. Указанный диапазон долговечностей  $N > 10^8$  известен в литературе как сверхмногоцикловая усталость (СВМУ). Методики СВМУ испытаний разработаны и реализованы для весьма ограниченного набора циклических нагружений, в первую очередь для реверсивного и пульсирующего растяжения-сжатия, а также кручения образцов. Однако для оценок долговечности различных элементов конструкций, подверженных высокочастотным длительным воздействиям в условиях сложного нагружения, необходимы критерии многоосного СВМУ разрушения. В [3] была предложена схема обобщения многоосного критерия разрушения на режим СВМУ. В основе обобщенного многоосного критерия типа Финдли лежит подобие поведения левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой.

**1. Определение критической плоскости для многоосного напряженного состояния.** Расчет усталостной долговечности по критерию Финдли требует определения ориентации плоскости, проходящей через заданную материальную точку, на которой достигается максимальное значение функции  $F = \Delta\tau_n + 2\alpha\sigma_n$ . Рассмотрим трехосное циклическое нагружение в системе координат, связанной с главными осями тензора напряжений. Предполагаем, что эти оси не меняются в течение цикла и выбраны так, что максимумы главных напряжений удовлетворяют неравенствам  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Введем следующие обозначения:  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3$  - размах главных напряжений в цикле,  $\Sigma_{12} = \sigma_1 - \sigma_2, \Sigma_{23} = \sigma_2 - \sigma_3, \Sigma_{13} = \sigma_1 - \sigma_3, \Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_{13} = \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3, \Delta\sigma_{23} = \Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3$ . Определим ориентацию критической плоскости с компонентами нормали:  $x_1 = n_1^2 \geq 0, x_2 = n_2^2 \geq 0, x_3 = n_3^2 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

Можно показать, что задача определения критической плоскости сводится к определению максимума функции

$$F(x_2, x_3) = \sqrt{\Delta\sigma_{12}^2 x_2 + \Delta\sigma_{13}^2 x_3 - (\Delta\sigma_{12} x_2 + \Delta\sigma_{13} x_3)^2} + 2\alpha(\sigma_1 - \Sigma_{12} x_2 - \Sigma_{13} x_3)$$

при ограничениях  $0 \leq x_2 + x_3 \leq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ .

Приведем результаты решения этой задачи для всевозможных значений максимумов и размахов главных напряжений.

1. Если  $\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12} \neq \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}, \Delta\sigma_{12} \neq 0, \Delta\sigma_{13} \neq 0$ .

Примем обозначения:

$$\beta_{12} = 4\alpha\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12}, \beta_{13} = 4\alpha\Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}, \Delta = 2(\beta_{13} - \beta_{12}) \neq 0$$

$$\Delta_S = \Delta\sigma_{12}\beta_{13} - \Delta\sigma_{13}\beta_{12}, \Delta_T = 2(\Delta\sigma_{13} - \Delta\sigma_{12})$$

$$\Delta_2 = \Delta\sigma_{13}\Delta_S/\Delta - (\Delta_S^2 + \Delta_T^2)/\Delta^2, \Delta_3 = (\Delta_S^2 + \Delta_T^2)/\Delta^2 - \Delta\sigma_{12}\Delta_S/\Delta$$

1-а.  $\Delta\sigma_{12} \neq \Delta\sigma_{13}$

Условия экстремума  $F(x_2, x_3)$ :  $x_2 = \Delta_2/(\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}), x_3 = \Delta_3/(\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23})$

1-б.  $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0$

Условия экстремума  $F(x_2, x_3)$ :  $x_2 + x_3 = \Delta_S/(\Delta\sigma_{12}\Delta)$

2. Если  $\Sigma_{12}/\Delta\sigma_{12} = \Sigma_{13}/\Delta\sigma_{13}$ , необходимо  $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{13} \neq 0, \Sigma_{12} = \Sigma_{13}$ .

Условия экстремума  $F(x_2, x_3)$ :  $x_2 + x_3 = \left(1 - \beta_{12}/\sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right)/2$ .

Найденные значения  $x_2$ ,  $x_3$  должны удовлетворять условиям  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ ,  $x_2 + x_3 < 1$  и условиям максимума  $F(x_2, x_3)$ :  $\Delta\sigma_{12}^2 + 4\Delta\sigma_{13}\Delta\sigma_{23}x_3 > 0$ ,  $\Delta\sigma_{13}^2 - 4\Delta\sigma_{12}\Delta\sigma_{23}x_2 > 0$ . Если таких значений не существует, то необходимо искать максимум  $F(x_2, x_3)$  на границах: либо  $x_2 = 0$ , либо  $x_3 = 0$ , либо  $x_2 + x_3 = 1$ .

3. В этом случае максимум  $F(x_2, x_3)$  достигается при значениях:

$$x_2 = 0, x_3 = \left(1 - \beta_{13}/\sqrt{4 + \beta_{13}^2}\right)/2$$

$$x_3 = 0, x_2 = \left(1 - \beta_{12}/\sqrt{4 + \beta_{12}^2}\right)/2$$

$$x_2 + x_3 = 1, x_2 = \left(1 + \beta_{23}/\sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right)/2, x_3 = \left(1 - \beta_{23}/\sqrt{4 + \beta_{23}^2}\right)/2$$

Из этих трех пар  $x_2$ ,  $x_3$  выбираем ту, где функция  $F(x_2, x_3)$  принимает наибольшее значение.

Таким образом, для случая многоосного напряженного состояния получено аналитическое решение задачи определения ориентации критической плоскости.

**Выводы.** Построено обобщение многоосного критерия усталостного разрушения на случай сверхмногоцикловой усталости и определена критическая плоскость развития усталостных повреждений для многоосного напряженно-го состояния.

**Благодарность.** Работа выполнена по проекту РФФИ № 15-08-02392-а.

### Библиографический список

1. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // *J. of Eng. for Indust.*, 1959. С. 301–306.
2. Bathias C., Paris P. C. *Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice*. New York: Dekker, 2005
3. Burago N. G., Zhuravlev A. B., Nikitin I. S., Yakushev V. L. Study of different modes of fatigue fracture and durability estimation for compressor disc of gas turbine engine // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2016. vol. 8, no. 5. pp. 523–532.

MSC: 74A60, 74F05

## The fracture criterion at very high cycle fatigue with the definition of the critical plane

*N. G. Burago*<sup>1</sup>, *A. D. Nikitin*<sup>2,3</sup>, *I. S. Nikitin*<sup>2,3</sup>, *V. L. Yakushev*<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, prospekt Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

<sup>2</sup> Institute of Computer Aided Design of RAS, 19/18, 2nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russian Federation.

<sup>3</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University) 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

### Abstract

A generalization of the fracture criterion for the regime of hyper-cycle fatigue is proposed taking into account the critical plane of fatigue damages for a multiaxial stress state.

**Keywords:** Cyclic loading, fatigue fracture, very high cycle fatigue, critical plane.

---

### Please cite this article in press as:

Burago N. G., Nikitin A. D., Nikitin I. S., Yakushev V. L. The fracture criterion at very high cycle fatigue with the definition of the critical plane, In: *Proceedings of the Tenth Russian Conference on Solid Mechanics* (September, 18–22, 2017, Samara, Russian Federation), Samara State Technical Univ., Samara, 2017, pp. 1–x (In Russian).

### Authors' Details:

*Nikolai G. Burago* <http://orcid.org/0000-0002-1806-9386>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of modelling in mechanics of solids IPMech RAS; e-mail: [buragong@yandex.ru](mailto:buragong@yandex.ru)

*Alexandre D. Nikitin* <http://orcid.org/0000-0002-2916-758X>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Dept. of Geomechanics; e-mail: [nikitin\\_alex@bk.ru](mailto:nikitin_alex@bk.ru)

*Ilya S. Nikitin* <http://orcid.org/0000-0003-3499-6910>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Director; ICAD RAS; e-mail: [i\\_nikitin@list.ru](mailto:i_nikitin@list.ru)

*Vladimir L. Yakushev* <http://orcid.org/0000-0002-9364-1194>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Chief Researcher; Dept. of Modeling ICAD RAS; e-mail: [yakushev@icad.org.ru](mailto:yakushev@icad.org.ru)