ГИБРИДНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ[1]

Н.Г.Бураго*, **И.С.Никитин****, **В.Л.Якушев****

* *Институт проблем механики РАН, Москва*

** *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

Введение

В основе применяемого гибридного метода решения лежит идея сквозного счета эволюции течения сплошной среды по модифицированной схеме SUPG FEM на произвольно подвижных адаптивных и наложенных сетках.

I Метод решения

Из большого множества существующих способов решения задач механики сплошных сред в областях сложной переменной геометрии (обзор [1]) в данной работе предпочтение отдано подходу адаптивных наложенных сеток из-за его достаточной робастности, неплохой точности с одной стороны и из-за относительной простоты реализации и легкости адаптации к разнообразным задачам. Расчет выполняется на основной сетке, окаймляющей (покрывающей с запасом) область решения. Основная сетка является произвольно подвижной и адаптивной к решению. Целью движения узлов является: 1) уменьшение ошибок аппроксимации около скачков и в пограничных слоях, 2) отслеживание подвижных контактных и межфазных границ. Подвижность узлов основной сетки ограничена требованиями невырожденности ячеек и отсутствия резких изменений размеров и формы ячеек. Все это реализуется приближенно с помощью метода упругих сеток [2, 3].

Для упрощения задания входной информации о геометрии области решения и для исключения известных трудностей генерации сеток в многосвязных областях сложной переменной геометрии применены дополнительные наложенные сетки для исключения из расчета тех узлов и ячеек основной сетки, которые накрыты наложенными сетками в зонах, недоступных для течения. Вариационная формулировка позволяет единообразно без особых проблем учитывать условия на подвижных, контактных, межфазных и внешних границах и рассчитывать их движение.

Отметим далее основные особенности применяемого метода решения.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проекту 15-08-02392-а

Сборник трудов XVI Всероссийской конференции-школы молодых исследователей "Современные проблемы математического моделирования". Ростов на Дону. Изд-во ЮФУ. 2015. С. 40-46.

Основные законы сохранения приняты в вариационной форме метода Галеркина-Петрова, полученной с использованием интегрирования по частям и содержащей производные от искомых функций не выше первого порядка. Определяющие соотношения для твердых деформируемых, жидких и газообразных сплошных сред записаны единообразно с использованием векторов и тензоров в актуальной конфигурации, равно пригодной для всех сред без ограничения по времени процесса. Эти соотношения включают описание фазовых переходов, пригодное для методов сквозного счета процессов разрушения и консолидации с определением поверхностей локализации переходов. Подробности можно найти в [4, 5, 6, 7].

Используются простейшие аппроксимации решения и его первых производных, интегралы вариационных уравнений вычисляются простейшими квадратурами Гаусса. Благодаря этому применяемые алгоритмы являются очень простыми и гибкими (легко модифицируемыми при изменениях в постановках задач). Наши эксперименты показали,что применение аппроксимаций более высокой точности делает алгоритмы решения трудно модифицируемыми при изменениях в постановке задач, а выигрыш в точности не оправдывает требуемых затрат труда.

Дополнительные условия, такие, например, как контактные условия, условия разрушения/консолидации учитываются в сквозном счете [1, 6, 7, 8] модификацией вариационных уравнений с применением методов множителей Лагранжа и штрафных функций.

В зависимости от скорости эволюционные задачи рассчитываются по явным, явно-неявным и неявным двухслойным схемам первого и квази-второго порядков точности. Неявные схемы реализованы итерационно, так что в любом случае порядок расчета полностью соответствует явным схемам. Поэтому никаких матриц жесткости вычислять и запоминать не требуется и никаких матричных операций не проводится. Память ЭВМ расходуется очень экономно, а быстродействие достигается применением эффективных итераций по методу сопряженных градиентов [9], требующего для решения конечного числа операций, пропорционального $N\sqrt{N}$, где N - число неизвестных. Для предобусловливания используется диагональная составляющая матрицы жесткости, вычисление которой не составляет труда. Потребная память ЭВМ для такого итерационного процесса составляет $5N$.

Консервативность алгоритмов обеспечивается вариационной формой применяемых законов сохранения и конечно-элементной аппроксимацией решения. Применяемые схемы расчета по времени (физическому или фиктивному в итерациях) аналогичны центрально-разностным двухслойным схемам. Устойчивость обеспечивается искусственной вязкостью, величина которой в каждой ячейке определяется по способу схемы SUPG FEM [10] так, чтобы уравновесить по норме вклад от диффузионных членов и вклад от прочих членов однородной части в каждом законе сохранения (в каждом балансном уравнении). Такую разновидность схемы называем "схемой уравновешивающей вязкости". В зонах сжатия ($\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$) и сверхзвукового течения ($M > 1$)

коэффициент уравновешивающей вязкости специально уменьшается вдвое, что улучшает расчет скачков. Физическая составляющая вязкости при этом корректируется (уменьшается с ростом искусственной вязкости) по методу экспоненциальной подгонки [11].

Для монотонизации и устранения мелкомасштабных паразитных возмущений применяется консервативное покоординатное сглаживание в редких расчетных узлах, которые 1) принадлежат одному и тому же ребру и 2) имеют разный знак второй производной по координатному направлению (ребро расположено произвольно). Реально эта процедура проводится в крайне малом количестве узлов. Ориентация ребра относительно координатного направления роли не играет.

Описанная совокупность приемов, обосновать которые удается только на уровне правдоподобных рассуждений, совместно с адаптацией произвольно подвижной расчетной сетки по методу упругих сеток дает удивительно хорошие результаты. Легко проверить.

II Результаты

Ниже приводятся решения характерных задач с подвижными границами раздела сред и скачками с помощью подвижных адаптивных и наложенных сеток. На Рис. 1, a-b для моментов времени 0.5 и 4.0 показана адаптивная упругая сетка в известной проверочной задаче о течении идевльного совершенного газа в канале (3.0x1.0) со ступенькой высоты 0.4, расположенной на расстоянии 0.6 от входа в канал. Скорость на входе характеризуется числом Маха 3.0, показатель адиабаты 1.4. Скачки видны по сгущению адаптивной сетки. Согласование с известным решением отличное.

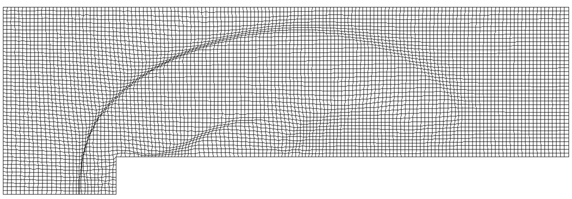
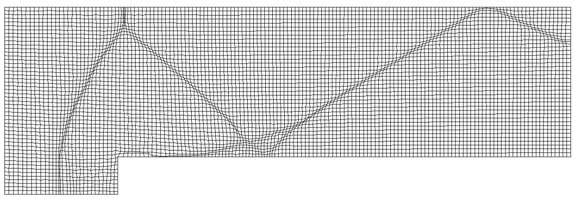
a)  b) 

Рис. 1. Течение идеального газа в канале $M = 3$, $\gamma = 1.4$, адаптивная сетка для моментов времени $t = 0.5$ (a), $t = 4.0$ (b)

На Рис. 2, a-b для моментов времени 0.45 и 7.0 представлены изолинии местного числа Маха (число изолиний и диапазон изменения показаны на рисунках) для задачи о нестационарном сверхзвуковом обтекании двух цилиндров. Окаймляющая сетка сначала была равномерной. Цилиндры заданы наложенными сетками. В процессе решения основная подвижная адаптивная сетка двигалась, подстраиваясь и отлавливая положение границ наложенных сеток и подвижные разрывы решения (скачки). Окаймляющая сетка содержала 160x160 квадратных ячеек.Поток набегал снизу с числом Маха 3.0. Показатель адиабаты 1.4. Размер области решения 5.0x5.0. Радиусы цилиндров 0.2. Скачки и их взаимодействие рассчитаны отлично.

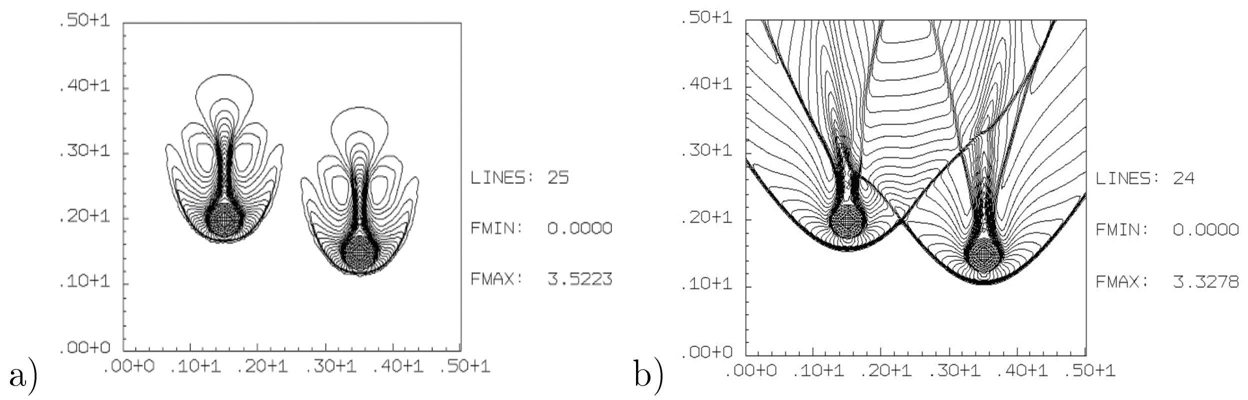


Рис. 2. Изолинии местного числа Маха при $t = 0.45$ (a) и $t = 7.0$ (b)

На Рис. 3, a-b показано поведение подвижной адаптивной сетки в упругопластической задаче формования лопатки турбины из цилиндрической заготовки под действием абсолютно жестких штампов. В течение всего процесса размер ячеек сетки поддерживался равномерным, чтобы избежать уменьшения шага по времени из-за сплющивания ячеек в зонах сжатия, что имеет место при использовании лагранжевых сеток. В заключение отметим что все

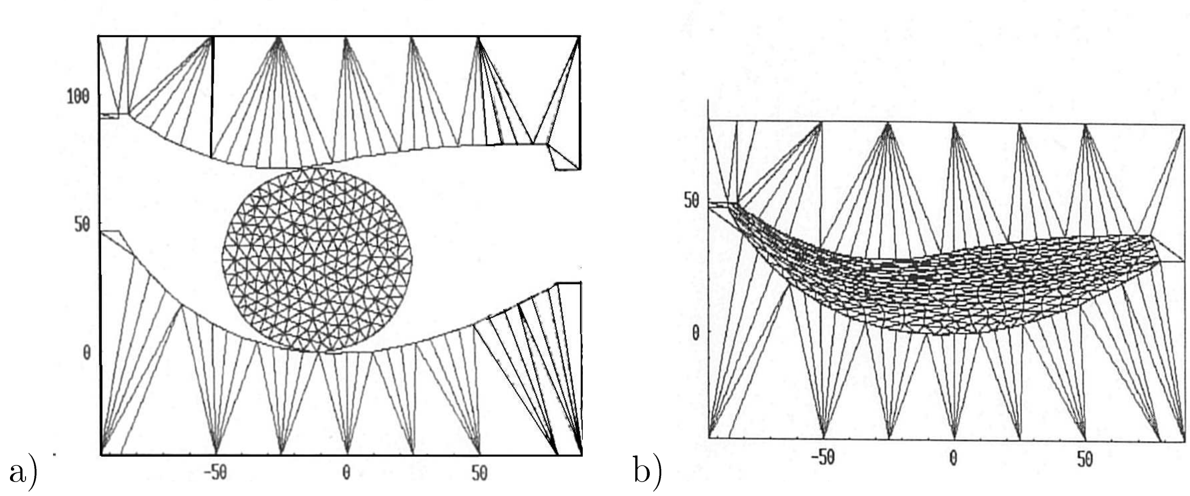


Рис. 3. Упругопластическая задача о формовании лопатки турбины жесткими штампами. Адаптивная сетка в начале (a) и конце (b) процесса.

составляющие рассмотренного подхода к решению уже многократно по отдельности обсуждались в литературе. Здесь лишь показано, насколько привлекательным является одновременное использование этой коллекции находок в области вычислительных методов. Набор приемов не претендует на оптимальность, но имеет ряд очевидных положительных качеств. В частности к достоинствам данного подхода следует отнести отсутствие необходимости для каждой новой задачи заново подбирать значения каких-либо параметров алгоритмов решения кроме мониторной функции.

Литература

1. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Обзор контактных алгоритмов // Изв. РАН, МТТ. 2005. No. 1. С. 44-85.

2. *Бураго Н.Г.* Формулировка основных уравнений механики сплошной среды в подвижных адаптивных координатах. Численные методы в механике твердого деформируемого тела, М.: ВЦ АН СССР, 1984. С. 32-49.

3. *Бураго Н.Г., Иваненко С.А.* Применение уравнений теории упругости к построению адаптивных сеток // Труды Всеросс. Конф. по прикладной геометрии, построению сеток и высокопроизводительным вычислениям, Москва, ВЦ РАН, 28 июня - 1 июля 2004г. / Ред. В.А. Гаранжа - М.: ВЦ РАН, 2004. С. 107-118.

4. *Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н.* Термодинамический метод вывода определяющих соотношений для моделей сплошных сред // Известия РАН Механика твердого тела. 2000. No. 6. С. 4-15.

5. *Бураго Н.Г.* Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычислительная механика сплошных сред, 2008. Т. 1, N. 4, С. 5-20.

6. *Бураго Н.Г., Никитин И.С.* Моделирование спекания с помощью теории пластичности // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 8. URL:http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/883.html

7. *Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л.* Численное моделирование спекания порошковых материалов под действием подвижного лазерного импульса // Вестник кибернетики. 2014. N. 3. С. 12-23. (ISSN 1811-7430)

8. *Самарский А.А., Моисеенко Б.Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВМиМФ, т.5, N.5, 1965, С.816-827.

9. *Wilkinson J.H., Reinsch C.* Handbook for Automatic Computation. Linear Algebra. Heidelberg New York Springer-Werlag Berlin. (Рус.пер.: Уилкинсон, Райнш Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. Пер. С.П.Забродина, В.Г.Потемкина, П.И.Рудакова. Ред. Ю.И.Толчеев. М., Машиностроение, 1976. 390 с.)

10. *Le Beau G.J., Ray S,E., Aliabadi S.K. and Tezduyar T.-E.* SUPG finite element computation of compressible flows with the entropy and conservation variables formulations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1993. V. 104. P. 397-422.

11. *Doolan, E.P., Miller, J.J.H., Schilders, W.H.A.* Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers, Boole Press, Dublin, 1980. (Рус.пер.: Э. Дулан, Дж. Миллер, У. Шилдерс, Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем, М., "Мир", 1983, 200 с.)