

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И СВМУ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ УПРУГОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Н.Г. Бураго¹, И.С. Никитин^{2,3}, П.А. Юшковский³

¹ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, 119526, Москва

²ФГБУН Институт автоматизации проектирования РАН, 123056, Москва

³ФГБОУВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Москва, e-mail: i_nikitin@list.ru

Аннотация. Целью исследования является расчет напряженно-деформированного состояния упругого диска переменной толщины при вибрации лопаток. Для этого разработан численно-аналитический метод решения трехмерных уравнений теории упругости. Решение представляется с помощью разложения в ряд Фурье, и коэффициенты находятся из краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль радиальной координаты. Полученные результаты использованы для оценки долговечности дисков газотурбинного двигателя в режиме сверхмногоциклового усталости.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, диск переменной толщины, высокочастотное нагружение, метод ортогональной прогонки, сверхмногоцикловая усталость.

Введение

Для определения сроков безопасной эксплуатации элементов конструкций и зон возможного разрушения с помощью критериев усталостной прочности необходим расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) [1]. Диски турбинных двигателей на протяжении многих лет эксплуатации подвергаются циклическим нагружениям двух основных типов – полетным циклам (взлет-полет-посадка) и вибрациям. Расчет НДС дисков для полетных циклов (МЦУ - малоцикловая усталость) рассмотрен в [2,3] с учетом переменной толщины дисков, центробежных и аэродинамических нагрузок. В данной работе описывается метод расчета НДС от вибрационных нагрузок.

Полное НДС диска складывается из НДС полетных циклов (действие центробежных сил и аэродинамических давлений от набегающего на лопатки потока) и НДС вибраций (крутильные колебания лопаток). В принятой постановке мы не рассматриваем причины вибраций такие, как действие пульсаций давления, возбуждение собственных форм колебаний лопаток, переходные режимы работы двигателя и так далее, а считаем вибрации заданными. Амплитуды и частоты вибраций приведены в [1].

В силу линейности задачи теории упругости НДС полетных циклов и НДС вибраций можно рассчитывать раздельно и затем суммированием получать полное НДС. Полные (суммарные) НДС от полетных циклов и вибраций для двух крайних положений лопатки при вибрационном кручении являются границами изучаемого циклического процесса, используемыми в критериях усталостной прочности.

В последнее время установлено [1,4], что низкоамплитудные вибрационные нагрузки при эксплуатации, действующие в течение длительного времени, тоже могут вызывать разрушение конструкций (СВМУ - сверхмногоцикловая усталость). Напряжения в дисках, вызванные вибрациями, существенно ниже не только предела текучести, но и предела усталости для МЦУ режима, то есть, по классическим представлениям теории малоциклового усталости такие вибрационные напряжения вообще не должны были бы представлять опасности. Однако, фрактографические исследования поверхностей излома разрушенных в процессе эксплуатации дисков показали, что первоначальное зарождение усталостного микрповреждения в дисках может происходить в циклических процессах обоих типов (механизмов): и МЦУ, и СВМУ. Отличительной особенностью разрушения по механизму СВМУ является то, что очаг зарождения микротрещин находится под поверхностью элемента конструкции, а не примыкает к ней, как в случае циклического процесса МЦУ. Эта особенность позволяет экспериментаторам различать данные механизмы при классификации

первичного очага поврежденности. Отметим, что дальнейшее развитие усталостной трещины, как правило, происходит в режиме малоциклового усталости и наблюдается в виде усталостных бороздок на поверхности излома в соответствии с полетными циклами нагружения. Отсюда следует, что механизмы МЦУ и СВМУ являются альтернативными и зачастую взаимодополняющими и взаимоусиливающими друг друга. Обзор экспериментальных исследований в этом направлении можно найти в [1,4].

В данной работе предложен метод расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния упругих дисков переменной толщины под действием циклических нагрузок от крутильных вибраций лопаток и проведена оценка долговечности диска переменной толщины в СВМУ циклическом процессе.

1. Приближенная система уравнений для диска переменной толщины под действием крутильных колебаний лопаток

В цилиндрической системе координат r, ϑ, z кольцевой диск $a \leq r \leq b$ имеет переменную толщину $2h(r)$, координата по толщине меняется в пределах $-h(r) \leq z \leq h(r)$. Будем считать, что на внешнем контуре (ободу) диска действуют переменные по времени и периодические по углу напряжения, которые моделируют воздействие от крутильных колебаний лопаток и согласованы с ними по амплитуде.

Система уравнений динамической теории упругости в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_{\vartheta}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz} \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz} \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} \quad \sigma_{\vartheta z} = 2\mu\varepsilon_{\vartheta z}$$

Связь деформаций и смещений имеет вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} - \frac{u_{\vartheta}}{r} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial z} \right)$$

где λ, μ - упругие модули Ламе, ρ - плотность материала диска. В дальнейшем используются безразмерные напряжения, отнесенные к $\lambda + 2\mu$, и безразмерные пространственные переменные, отнесенные к внутреннему радиусу диска a .

Граничные условия на свободных поверхностях при $z = \pm h(r)$ имеют вид:

$$z = \pm h(r): \quad \sigma_{rz} - h' \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\vartheta z} - h' \sigma_{r\vartheta} = 0, \quad \sigma_{zz} - h' \sigma_{rz} = 0$$

В силу периодичности всех искомым функций по окружной координате ϑ смещения кольцевого диска переменной толщины в полетных циклах нагружения можно представить в виде рядов Фурье:

$$u_r = e^{i\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n z + u_{3n} z^3) \sin n\vartheta, \quad u_{\vartheta} = e^{i\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} (v_n z + v_{3n} z^3) \cos n\vartheta, \quad u_z = e^{i\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} (w_n + w_{2n} z^2 + w_{4n} z^4) \sin n\vartheta$$

Соответствующее представление напряжений имеет вид:

$$\sigma_{rr} = e^{i\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n z + \sigma_{3n} z^3) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = e^{i\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} (s_n z + s_{3n} z^3) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{zz} = e^{i\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} (\Sigma_n z + \Sigma_{3n} z^3) \sin n\vartheta$$

$$\sigma_{r\vartheta} = e^{i\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n z + \tau_{3n} z^3) \cos n\vartheta, \quad \sigma_{rz} = e^{i\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + p_{2n} z^2 + p_{4n} z^4) \sin n\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta z} = e^{i\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} (T_n + T_{2n} z^2 + T_{4n} z^4) \cos n\vartheta$$

Коэффициенты рядов Фурье являются новыми вспомогательными искомыми функциями радиальной переменной r , множитель $e^{i\alpha t}$ задает вибрации.

Подставим выражения для смещений и напряжений в исходную систему и приравняем члены при одинаковых степенях z , вплоть до z^3 . В итоге получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений по радиальной координате для вспомогательных переменных при различных $n=0,1,2\dots$

$$\sigma_n' = n\tau_n / r - (\sigma_n - s_n) / r - 2p_{2n} - \rho\omega^2 u_n, \quad \tau_n' = -ns_n / r - 2\tau_n / r - 2T_{2n} - \rho\omega^2 v_n$$

$$p_n' = nT_n / r - p_n / r - \Sigma_n - \rho\omega^2 w_n, \quad u_n' = \sigma_n - \lambda U_n / r - \lambda w_{2n}$$

$$v_n' = \tau_n / \mu + V_n / r, \quad w_n' = p_n / \mu - u_n$$

$$w_{2n}' = p_{2n} / \mu - 3u_{3n}, \quad p_{2n}' = nT_{2n} / r - p_{2n} / r - 3\Sigma_{3n} - \rho\omega^2 w_{2n}$$

$$s_n = \lambda u_n' + U_n / r + 2\lambda w_{2n}, \quad \Sigma_n = \lambda u_n' + \lambda U_n / r + 2w_{2n}, \quad T_n = \mu v_n + \mu n w_n / r$$

$$u_{3n}' = \sigma_{3n} - \lambda U_{3n} / r - 4\lambda w_{4n}, \quad \sigma_{3n}' = n\tau_{3n} / r - (\sigma_{3n} - s_{3n}) / r - p_{4n} - \rho\omega^2 u_{3n}$$

$$v_{3n}' = \tau_{3n} / \mu + V_{3n} / r, \quad \tau_{3n}' = -ns_{3n} / r - 2\tau_{3n} / r - 4T_{4n} - \rho\omega^2 v_{3n}$$

$$s_{3n} = \lambda u_{3n}' + U_{3n} / r + 4\lambda w_{4n}, \quad \Sigma_{3n} = h'^2 (\sigma_n h + \sigma_{3n} h^3) / h^3 - \Sigma_n / h^2, \quad T_{2n} = \mu n w_{2n} / r + 3\mu v_{3n}$$

$$T_{4n} = h' (\tau_n h + \tau_{3n} h^3) / h^4 - (T_n + T_{2n} h^2) / h^4, \quad p_{4n} = h' (\sigma_n h + \sigma_{3n} h^3) / h^4 - (p_n + p_{2n} h^2) / h^4$$

Граничные условия:

$$r=a: \sigma_n = 0, \sigma_{3n} = 0, \tau_n = 0, \tau_{3n} = 0, p_n = 0, p_{2n} = 0$$

$$r=b: \sigma_n = 0, \sigma_{3n} = 0, \tau_n = \tau_{bn}, \tau_{3n} = 0, p_n = p_{bn}, p_{2n} = -p_{bn} / h^2$$

В работе [2] аналогичная система уравнений была выведена для расчета основного НДС диска переменной толщины для полетных циклов нагружения квазистатическими центробежными и аэродинамическими нагрузками.

2. Граничные условия для крутильных колебаний

Для расчета НДС диска, обусловленного крутильными колебаниями лопаток, краевые условия для вспомогательных переменных (коэффициентов Фурье) на радиальных границах

$r = a$ и $r = b$ имеют вид

$$r=a: \sigma_n = 0, \sigma_{3n} = 0, \tau_n = 0, \tau_{3n} = 0, p_n = 0, p_{2n} = 0$$

$$r=b: \sigma_n = 0, \sigma_{3n} = 0, \tau_n = \tau_{bn}, \tau_{3n} = 0, p_n = p_{bn}, p_{2n} = -p_{bn} / h^2$$

где τ_{bn} и p_{bn} - заданные значения коэффициентов Фурье, учитывающие касательные к ободу диска напряжения в корневых сечениях лопаток при их кручении. Для определения значений

τ_{bn} и p_{bn} будем считать каждую лопатку пластиной прямоугольного сечения ширины d и используем решение известной задачи о кручении пластин прямоугольного поперечного сечения с погонной круткой γ [5].

Приближенные граничные условия при $r=b$, соответствующие параметрам закрученной лопатки приводятся к виду [6]:

$$\tau_b(\vartheta) = Q_0(1 - \vartheta^2/\delta^2), \quad Q_0 = -0.8\mu\gamma d/h, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

$$p_b(\vartheta) = T_0 \vartheta/\delta, \quad T_0 = \mu\gamma d, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

где $\delta = d/(2b) \ll 1$.

Пусть число лопаток на диске равно N_0 . Разложение периодической функции распределения тангенциального напряжения на внешнем контуре в ряд Фурье (один период $-\pi/N_0 < \vartheta < \pi/N_0$) имеет вид:

$$\tau_b(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{(k)} \cos(kN_0\vartheta), \quad \tau^{(0)} = 2Q_0N_0\delta/(3\pi), \quad \tau^{(k)} = \frac{4Q_0}{\pi k^2 N_0 \delta} \left(\frac{\sin(kN_0\delta)}{kN_0\delta} - \cos(kN_0\delta) \right)$$

Осевые касательные напряжения тоже раскладываются в ряд Фурье:

$$p_b(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)} \sin(kN_0\vartheta), \quad p^{(k)} = \frac{2}{k\pi} T_0 \left(\frac{\sin(kN_0\delta)}{kN_0\delta} - \cos(kN_0\delta) \right)$$

Таким образом, для различных $n=kN_0$ необходимо решать двухточечные краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями при $r=a$ и $r=b$ с учетом выражений для коэффициентов разложения нагрузок в ряд Фурье по угловой координате. Эти краевых задач решались методом ортогональной прогонки. После этого компоненты напряжений определялись суммированием рядов Фурье. Количество членов рядов Фурье при суммировании для практической сходимости не превышало 20.

3. Примеры расчетов

Для расчетов были выбрана форма диска, сечение которого показано на Рис. 1, значения параметров $a=0.05\text{м}$, $b=0.4\text{м}$, $d=0.01\text{м}$, $\gamma=0.1$ рад/м, $\omega=628$ 1/с, $\lambda=78$ ГПа, $\mu=44$ ГПа, $\rho=4370$ кг/м³ (титановый сплав).

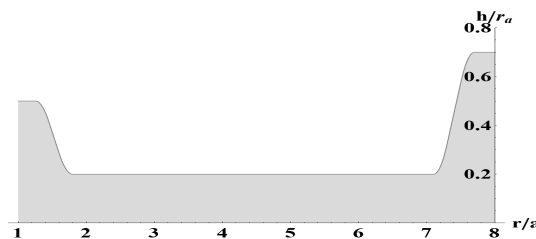


Рис. 1. Форма сечения диска

Из расчетов видно, что максимальные значения компонент напряжений на ободе диска имеют порядок 30-50 МПа, следовательно, размах их колебаний за цикл кручения лопатки равен 60-100 МПа.

Ранее, как упомянуто во введении, в [2] была решена задача определения напряженно-деформированного состояния вращающегося диска переменной толщины в полетном цикле нагружения под действием центробежных сил в диске и с учетом периодической системы лопаток на внешнем контуре. Также были определены дополнительные напряжения в диске, возникающие при изгибе лопаток под действием аэродинамических нагрузок.

Для исследования циклического режима, связанного с процессом СВМУ, необходимо наложить полученные значения амплитуд напряжений при крутильных колебаниях лопаток со знаками + и - на основное НДС, связанное с полетным циклом нагружения диска с учетом дополнительных аэродинамических нагрузок.

Радиальные распределения суммарных шести компонент напряжений для крайних положений цикла крутильных колебаний лопаток в окрестности внешнего обода диска приведены на Рис. 2 и Рис. 3. В обозначениях напряжений индексы 1,2,3 соответствуют координатам r, θ, z .

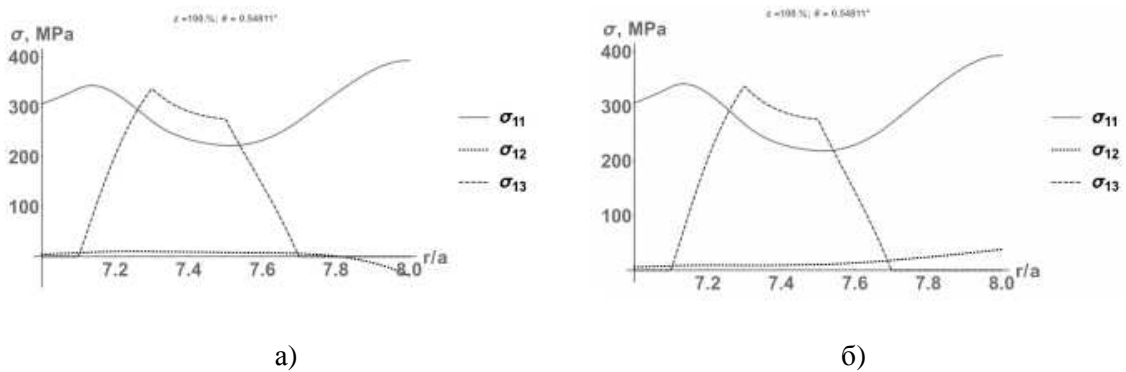


Рис. 2. Суммарные радиальные распределения напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$.

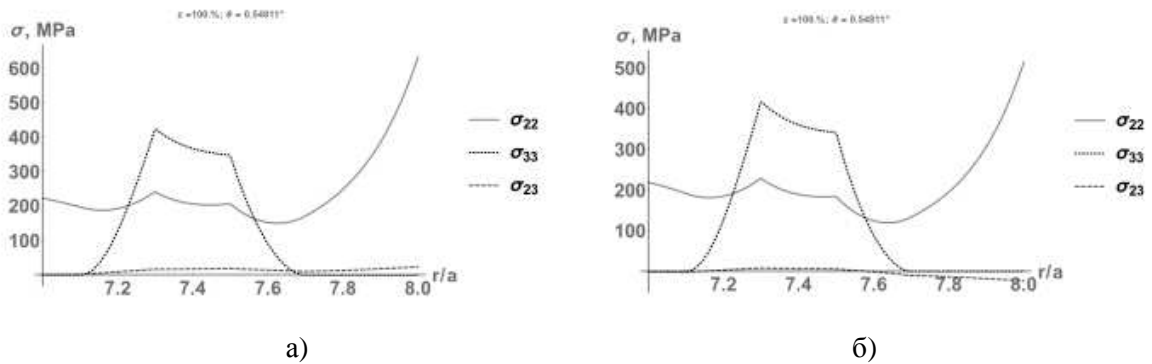


Рис. 3. Суммарные радиальные распределения напряжений $\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}$.

Разница между значениями напряжений на левых (а) и правых (б) графиках на этих рисунках есть размах напряжений в высокочастотном цикле, связанном с крутильными колебаниями лопаток.

На Рис. 4 показаны вычисленные по критериям для СВМУ разрушения [7] распределения логарифма долговечности (числа циклов N до разрушения) на внешнем ободе диска под лопаткой. Учитывается суммарное действие полетных циклов и вибраций без учета аэродинамических нагрузок на лопатки (а) и с учетом этих нагрузок (б)

На этих графиках видно значительное (до $10^{9.3} - 10^{9.5}$ циклов) падение долговечности на внешнем ободе (в зоне контакта диска и лопаток) и место зарождения начального усталостного повреждения.

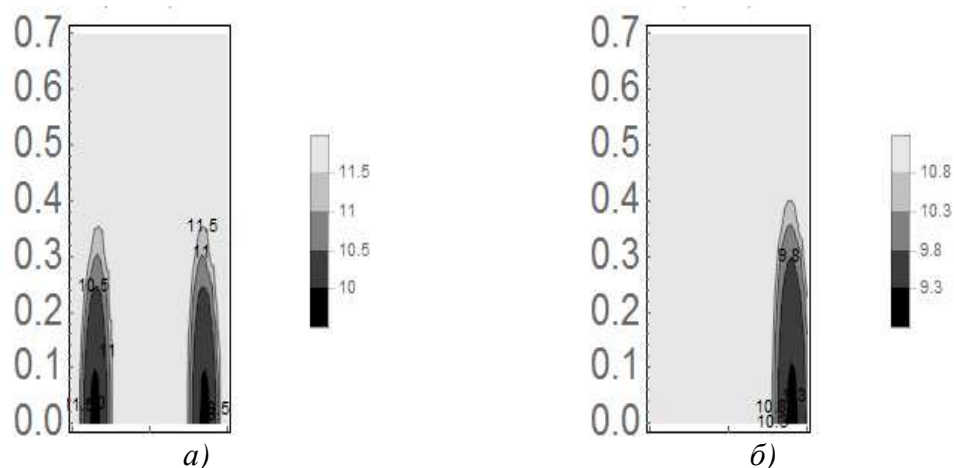


Рис. 4. Распределения логарифма долговечности по радиальной координате на внешнем ободе диска под лопаткой

При выбранной частоте колебаний их период имеет порядок 0.01 с. Поэтому время до усталостного разрушения в результате вибраций лопаток может составить величину 20 000 - 30 000 часов, вполне достижимую в процессе эксплуатации.

Заключение

Предложен метод расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния упругих дисков переменной толщины под действием циклических нагрузок от крутильных вибраций лопаток в компрессорах газотурбинных двигателей.

Метод основан на приближенном представлении решения рядами Фурье по координатам по толщине диска и в окружном направлении. Для коэффициентов Фурье, зависящих от радиальной координаты, выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, краевые задачи для которой решены методом ортогональной прогонки.

Расчитанное НДС от вибраций было наложено на НДС в полетных циклах и использовано для оценок сроков безопасной эксплуатации рассматриваемых дисков на основе обобщенного критерия сверхмногоциклового усталостного разрушения. Выявлено значительное падение долговечности на внешнем ободе (в зоне контакта диска и лопаток).

Работа выполнена по проектам РФФИ 15-08-02392, 14-01-00741 и программе РАН ОЭМПУ-12.

Список литературы

1. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа. Изд-во научно-технической литературы «Монография». 2007. 498с.
2. Бурого Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А. Модель деформирования диска переменного сечения с учетом структурной анизотропии усталостных свойств. // МТТ. Известия РАН. 2015. №5. С. 84-98.
3. Бурого Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций. // Известия РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22-33.
4. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle fatigue in mechanical practice. Marcel Dekker. New York. 2005. 304p.
5. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука. 1979. 744с.
6. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопrotивление материалов. - М: Наука. 1986. 500с.
7. Бурого Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Сверхмногоцикловое усталостное разрушение титановых дисков компрессора. Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. N1. С. 52-67.