Нелинейная механика деформируемого твердого тела

Практическая часть

С. А. Лычев

Составители презентации: С. А. Лычев и К. Г. Койфман

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН
Москва

lychevsa@mail.ru

http://ipmnet.ru/~lychev

20 октября 2016 г.

Разделы практических занятий

1. Дифференциальные операции векторного анализа

1. Дифференциальные операции векторного анализа
   - Используемые обозначения
   - Дифференциальные операции векторного анализа в декартовых координатах
   - Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах
   - Цилиндрические координаты
   - Сферические координаты

На протяжении всего раздела $\mathcal{V}$ — n–мерное евклидово векторное пространство со скалярным произведением.
Скалярное произведение обозначается точкой $(\cdot)$, диада $\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{v}}$ векторов $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ есть оператор, для которого определены следующие действия:

$$(\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{w}}), \quad \underline{\mathbf{w}} \cdot (\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{w}}).$$

В пространстве $\mathcal{V}$ всегда существует ортонормированный базис.
Он обозначается как $(\underline{\mathbf{i}}_k)_{k=1}^n$.
Норма, порожденная скалярным произведением обозначается как $\|\cdot\|$.

Введем набла-оператор следующим образом:

$$\nabla = \underline{\mathbf{i}}_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Оператор ∇ представляет собой символический вектор; вместе с тем правила действия с ним отличны от геометрических векторов в $\mathcal{V}$. Согласно правилам дифференцирования для двух различных векторных полей $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}})$, $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) \in \mathcal{V}$, $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{i}}_k x^k$ вообще говоря $\left(\nabla \otimes \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}})\right) \otimes \underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{r}}) \neq \nabla \otimes \left(\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) \otimes \underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{r}})\right)$.

Дифференциальные операции векторного анализа в декартовых координатах

Если в области $\Omega \subset \mathcal{V}$ определено скалярное поле $\phi(\underline{\mathbf{r}})$, т.е. отображение $\Omega \to \mathbb{R}$, то действие набла-оператора приводит к вычислению векторного поля градиента $\phi(\underline{\mathbf{r}})$:

$$\operatorname{grad} \phi(\underline{\mathbf{r}}) = \nabla \phi(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{i}}_k \frac{\partial}{\partial x^k} \phi(\underline{\mathbf{r}}).$$

Дифференциальные операции векторного анализа в декартовых координатах

Если в области $\Omega \subset \mathcal{V}$ определено векторное поле $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{i}}_k \underline{\mathbf{v}}^k(\underline{\mathbf{r}})$, т.е. отображение $\Omega \to \mathcal{V}$, то действие набла-оператора приводит к вычислению тензорного поля градиента поля $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}})$:

$$\operatorname{grad} \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{i}}_k \otimes \underline{\mathbf{i}}_p \frac{\partial}{\partial x^k} v^p;$$

дивергенции векторного поля:

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{i}}_k \cdot \underline{\mathbf{i}}_p \frac{\partial}{\partial x^k} v^p = \delta_{kp} \frac{\partial}{\partial x^k} v^p = \frac{\partial}{\partial x^k} v^k;$$

ротора векторного поля:

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \nabla \times \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) =$$

$$= \underline{\mathbf{i}}_1 \left(\frac{\partial v^3}{\partial x^2} - \frac{\partial v^2}{\partial x^3} \right) + \underline{\mathbf{i}}_2 \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^3} - \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \right) + \underline{\mathbf{i}}_3 \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} - \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \right).$$

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Принципиально важным является переход к так называемым криволинейным координатам, которые представляют собой совокупность переменных величин q^p $(p = 1, \dots, n)$, определяющих значения прямоугольных координат x^k $(k = 1, \dots, n)$ посредством отображения:

$$x^k(q^p) \,:\, \mathbb{R}^3 \supset A \to \mathbb{R}^n \quad (q^p \in A,\, x^k \in \mathbb{R}^n),$$

которое невырождено почти всюду в A, т.е.

$$\exists A_0 \; mesA_0 = 0 \; \forall q^p \in A \setminus A_0 \; J = \left| \frac{\partial x^k}{\partial q^p} \right| \neq 0.$$

Здесь $mesA_0$ означает меру множества A_0. При выполнении этого условия почти всюду в A существует обратное отображение

$$q^p(x^k) \,:\, \mathbb{R}^n \to A \setminus A_0.$$

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Выясним, как записывается дифференциал вектора $d\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}})$. Полагаем, что $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{i}}_k x^k(\underline{\mathbf{r}})$. Тогда $d\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{i}}_k dx^k$. Но $x^k = x^k(q^p)$ и согласно цепному правилу дифференцирования сложной функции

$$dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial q^p} dq^p, \qquad d\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}_k \frac{\partial x^k}{\partial q^p} dq^p.$$

Введем обозначения для следующих векторных полей:

$$\underline{\mathbf{e}}_p = \underline{\mathbf{i}}_k \frac{\partial x^k}{\partial q^p}.$$

Теперь дифференциал вектора может быть записан в виде

$$d\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{e}}_p dq^p.$$

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Поскольку якобиан преобразования к новым переменным $J \neq 0$ в $A \setminus A_0$, векторы $\underline{\mathbf{e}}_p$ почти всюду в A линейно независимы и образуют некомпланарную тройку, следовательно, при фиксированных q^p представляет некоторый, вообще говоря, неортогональный базис $\mathcal{V}$.

Числа $g_{pk} = \underline{\mathbf{e}}_p \cdot \underline{\mathbf{e}}_k$ определяют метрические свойства $\mathcal{V}$ в отношении к базису $\underline{\mathbf{e}}_p$: теперь норма вектора $\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ вычисляется так:

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{e}}_p v^p, \quad \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 = (\underline{\mathbf{e}}_p v^p) \cdot (\underline{\mathbf{e}}_k v^k) = (\underline{\mathbf{e}}_p \cdot \underline{\mathbf{e}}_k) v^p v^k = g_{pk} v^p v^k.$$

Отметим, что

$$g_{pk} = \underline{\mathbf{e}}_p \cdot \underline{\mathbf{e}}_k = \Big(\underline{\mathbf{i}}_n \frac{\partial x^n}{\partial q^p}\Big) \cdot \Big(\underline{\mathbf{i}}_m \frac{\partial x^m}{\partial q^k}\Big) = \underline{\mathbf{i}}_n \cdot \underline{\mathbf{i}}_m \frac{\partial x^n}{\partial q^p} \frac{\partial x^m}{\partial q^k} =$$
$$= \delta_{nm} \frac{\partial x^n}{\partial q^p} \frac{\partial x^m}{\partial q^k} = \frac{\partial x^n}{\partial q^p} \frac{\partial x^n}{\partial q^k}; \quad |g_{pk}| = J^2.$$

Совокупность чисел g_{pk} может быть записана в форме матрицы $\big(g_{pk}\big)$, элементы которой представляют координаты тензора второго ранга, называемого метрическим.

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Рассмотрим действие набла-оператора на векторное поле, заданное посредством криволинейных координат. Напомним, что

$$\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Согласно цепному правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial q^p}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial q^p}$$

и, следовательно,

$$\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial q^p}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial q^p}.$$

Введем обозначения для следующих векторных полей:

$$\mathbf{e}^p = \mathbf{i}_k \frac{\partial q^p}{\partial x^k}.$$

Тогда

$$\nabla = \mathbf{e}^p \frac{\partial}{\partial q^p}.$$

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Поскольку $J \neq 0$ в $A \setminus A_0$, $mesA_0 = 0$, при почти всех фиксированных q^p тройка векторов $\underline{\mathbf{e}}^p$ некомпланарна и представляет, вообще говоря, неортогональный базис $\mathcal{V}$. Числа $g^{pk} = \underline{\mathbf{e}}^p \cdot \underline{\mathbf{e}}^k$ образуют матрицу $\left(g^{pk}\right)$, обратную к $\left(g_{pk}\right)$ Действительно,

$$g^{pk} = \underline{\mathbf{e}}^p \cdot \underline{\mathbf{e}}^k = \left(\underline{\mathbf{i}}_n \frac{\partial q^p}{\partial x^n}\right) \cdot \left(\underline{\mathbf{i}}_m \frac{\partial q^k}{\partial x^m}\right) = \underline{\mathbf{i}}_n \cdot \underline{\mathbf{i}}_m \frac{\partial q^p}{\partial x^n} \frac{\partial q^k}{\partial x^m} =$$

$$= \delta_{nm} \frac{\partial q^p}{\partial x^n} \frac{\partial q^k}{\partial x^m} = \frac{\partial q^p}{\partial x^m} \frac{\partial q^k}{\partial x^m}; \quad \left|g_{pk}\right| = J^{-2}.$$

$$g_{pk} g^{kt} = \frac{\partial x^n}{\partial q^p} \frac{\partial x^n}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial x^m} \frac{\partial q^t}{\partial x^m} = \frac{\partial x^n}{\partial q^p} \frac{\partial x^n}{\partial x^m} \frac{\partial q^t}{\partial x^m} =$$

$$= \delta_{nm} \frac{\partial x^n}{\partial q^p} \frac{\partial q^t}{\partial x^m} = \frac{\partial x^n}{\partial q^p} \frac{\partial q^t}{\partial x^n} = \frac{\partial q^t}{\partial q^p} = \delta_{pt}.$$

По этой причине базис $\underline{\mathbf{e}}^p$ является дуальным к базису $\underline{\mathbf{e}}_p$, т.е. $\underline{\mathbf{e}}^p \cdot \underline{\mathbf{e}}^k = \delta_{pk}$. Кроме того, $\underline{\mathbf{e}}^k = g^{kp} \underline{\mathbf{e}}_p$; $\underline{\mathbf{e}}_k = g_{kp} \underline{\mathbf{e}}^p$.

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Сформулируем операции тензорного анализа в криволинейных координатах. Градиент скалярной функции $\phi(\underline{\mathbf{r}}) = \phi(q^k)$ определяется выражением

$$\operatorname{grad} \phi(q^k) = \underline{\nabla} \phi(q^k) = \underline{\mathbf{e}}^p \frac{\partial}{\partial q^p} \phi.$$

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Градиент векторного поля $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{e}}_k v(q^k)$ может быть записан в виде

$$\operatorname{grad} \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{e}}^p \frac{\partial}{\partial q^p} \otimes \underline{\mathbf{e}}_k v^k.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\nabla \otimes \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \left(\underline{\mathbf{e}}^p \otimes \frac{\partial}{\partial q^p} \underline{\mathbf{e}}_k\right) + \underline{\mathbf{e}}^p \otimes \underline{\mathbf{e}}_k \frac{\partial}{\partial q^p} v^k.$$

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Здесь в выражениях появляются векторы вида $\dfrac{\partial}{\partial q^p}\underline{\mathbf{e}}_k$, т.е. производные элементов ковариантного базиса. Их удобно представлять в форме разложения по тому же ковариантному базису, т.е.:

$$\frac{\partial}{\partial q^p}\underline{\mathbf{e}}_k = \underline{\mathbf{e}}_s\left(\underline{\mathbf{e}}^s \cdot \frac{\partial}{\partial q^p}\underline{\mathbf{e}}_k\right) = \Gamma^s_{kp},$$

где $\Gamma^s_{kp} = \underline{\mathbf{e}}^s \cdot \dfrac{\partial}{\partial q^p}\underline{\mathbf{e}}_k$ - так называемые символы Кристоффеля II рода. После переобозначения немых индексов, для градиента векторного поля получаем следующее выражение:

$$\nabla \otimes \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{e}}^p \otimes \underline{\mathbf{e}}_s\left(\Gamma^s_{kp} v^k + \frac{\partial}{\partial q^p} v^s\right).$$

Получился тензор 2-го ранга, 1 раз контравариантный и 1 раз ковариантный. В координатной записи он имеет вид $v^s_{\cdot,p}$ и называется ковариантной производной.

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Символы Кристоффеля можно вычислять, дифференцируя компоненты метрического тензора. Действительно, из соотношений

$$\frac{\partial g_{ps}}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial q^k}(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_s) = \frac{\partial \mathbf{e}_p}{\partial q^k} \cdot \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_p \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^k \partial q^p} \cdot \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_p \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^k \partial q^s},$$

$$\frac{\partial g_{sk}}{\partial q^p} = \frac{\partial}{\partial q^p}(\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_k) = \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial q^p} \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^p} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^p \partial q^s} \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_s \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^p \partial q^k},$$

$$\frac{\partial g_{kp}}{\partial q^s} = \frac{\partial}{\partial q^s}(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_p) = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^s} \cdot \mathbf{e}_p + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_p}{\partial q^s} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^s \partial q^k} \cdot \mathbf{e}_p + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^s \partial q^p};$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_t q^t = \mathbf{i}_t x^t,$$

меняя порядок дифференцирования, получаем выражения для символов Кристоффеля I рода:

$$\mathbf{e}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_p}{\partial q^k} = \Gamma_{s,pk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ps}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial q^p} - \frac{\partial g_{kp}}{\partial q^s}\right).$$

Символы Кристоффеля II рода теперь не составляет труда вычислить, поскольку $\mathbf{e}^s = g^{sn}\mathbf{e}_n$ и, следовательно,

$$\mathbf{e}^s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_p}{\partial q^k} = \Gamma^s_{pk} = g^{sn}\Gamma_{n,pk}.$$

Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах

Дивергенция векторного поля $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}})$ представляет собой поле скаляров, вычисляемых следующим образом:

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{v}}(q^s).$$

Поскольку

$$\nabla = \underline{\mathbf{e}}^k \frac{\partial}{\partial q^k}, \qquad \underline{\mathbf{v}}(q^k) = \underline{\mathbf{e}}_k v^k,$$

то

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}(q^k) = \left(\underline{\mathbf{e}}^k \frac{\partial}{\partial q^k}\right) \cdot \left(\underline{\mathbf{e}}_p v^p\right) = \underline{\mathbf{e}}^k \cdot \underline{\mathbf{e}}_p \frac{\partial v^p}{\partial q^k} + \underline{\mathbf{e}}^k \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_p}{\partial q^k} v^p =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}^k \cdot \underline{\mathbf{e}}_p \frac{\partial v^p}{\partial q^k} + \underline{\mathbf{e}}^k \cdot \underline{\mathbf{e}}_s \Gamma^s_{pk} v^p = \delta_{kp} \frac{\partial v^p}{\partial q^k} + \delta_{ks} \Gamma^s_{pk} v^p = \frac{\partial v^k}{\partial q^k} + \Gamma^k_{pk} v^p.$$

Дивергенция тензорного поля $\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\mathbf{r}}) = \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_p t^{kp}$ является векторным полем:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\mathbf{T}}}(\underline{\mathbf{r}}) = \nabla \cdot \left(\underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_p t^{kp}\right) = \left(\underline{\mathbf{e}}^s \frac{\partial}{\partial q^s}\right) \cdot \left(\underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_p t^{kp}\right) =$$

$$= \left(\underline{\mathbf{e}}^s \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_k}{\partial q^s}\right) \underline{\mathbf{e}}_p t^{kp} + \left(\underline{\mathbf{e}}^s \cdot \underline{\mathbf{e}}_k\right) \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_p}{\partial q^s} t^{kp} + \underline{\mathbf{e}}_p \frac{\partial t^{kp}}{\partial q^s}\right) =$$

$$= \Gamma^s_{ks} \underline{\mathbf{e}}_p t^{kp} + \delta_{sk} \left(\underline{\mathbf{e}}_t \Gamma^t_{ps} t^{kp} + \underline{\mathbf{e}}_p \frac{\partial t^{kp}}{\partial q^s}\right) =$$

$$= \Gamma^s_{ks} \underline{\mathbf{e}}_p t^{kp} + \underline{\mathbf{e}}_t \Gamma^t_{ps} t^{sp} + \underline{\mathbf{e}}_p \frac{\partial t^{sp}}{\partial q^s} =$$

$$= \underline{\mathbf{e}}_p \left(\frac{\partial t^{sp}}{\partial q^s} + \Gamma^s_{ks} t^{kp} + \Gamma^p_{ks} t^{sk}\right).$$

Цилиндрические координаты

Теперь $\mathcal{V}$ — трехмерное евклидово пространство.
Цилиндрические координаты определяются в полуслое $A \subset \mathbb{R}^3$:

$$A = [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times] - \infty, \infty[, \qquad A_0 = [0] \times [0, 2\pi[\times] - \infty, \infty[.$$

Обычно используют обозначения

$$q^1 = r,\ q^2 = \varphi,\ q^3 = \zeta; \quad x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$$

Тогда $J = J_c = r$,

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = \zeta;\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x},\ z = \zeta.$$

Произвольный вектор из $\mathcal{V}$ может быть представлен следующим образом:

$$\forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \quad \exists \{r, \varphi, \zeta\} \in A \quad \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}_1 r\cos\varphi + \underline{\mathbf{i}}_2 r\sin\varphi + \underline{\mathbf{i}}_3 \zeta.$$

Осевая прямая $r = 0$ представляет совокупность особых точек, образующих множество A_0.

Также, $\mathcal{V}$ — трехмерное евклидово пространство.
Сферические координаты $\{r, \varphi, \psi\}$ определяются в области:

$$A = [0, \infty[\times [0, 2\pi[\times [0, \pi], \qquad A_0 = [0] \times [0, 2\pi[\times \big([0] \cup [\pi]\big).$$

Стандартные обозначения имеют вид

$$q^1 = r,\ q^2 = \varphi,\ q^3 = \psi; \quad x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$$

Тогда $J = J_s = -r^2 \sin\psi$,

$$x = r\cos\varphi\sin\psi,\ y = r\sin\varphi\sin\psi,\ z = r\cos\psi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x},\ \psi = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Таким образом,

$$\forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \quad \exists\{r, \varphi, \psi\} \in A \quad \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{i}}_1 r\cos\varphi\sin\psi + \underline{\mathbf{i}}_2 r\sin\varphi\sin\psi + \underline{\mathbf{i}}_3 r\cos\psi.$$

Особые точки, образующие A_0 - это точки на полуосях $\psi = 0$ и $\psi = \pi$.